поверхность с (ориентированным) краем Г, то согласно теореме Стокса интеграл от a по Г равен

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{a}\, d\mathbf{l}) = \int_{S}\int (\mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{a})\, dS = 0$$

Это утверждение может служить основанием для доказательства теоремы 3 § 13.3. Но и на этом пути не избежать сложных рассуждений, потому что надо иметь в виду, что в любой области существуют замкнутые (заузливающиеся) контуры, на которые невозможно натянуть гладкую поверхность.

§ 13.12. Дифференцирование интеграла по параметру

Начнем с того, что докажем равенство

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{\Omega} f(x, \mathbf{y})\, d\mathbf{y} = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} f(x, \mathbf{y})\, d\mathbf{y} \quad (a \leqslant x \leqslant b), \tag{1}$$

где предполагается, что Ω — замкнутое измеримое множество пространства точек $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m)$, а f и $\frac{\partial f}{\partial x}$ непрерывны на множестве $H = [a, b] \times \Omega$ $(x \in [a, b],\ \mathbf{y} \in \Omega)$.

В частности, если Ω есть отрезок $[c, d]$, то формула (1) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{c}^{d} f(x, y)\, dy = \int_{c}^{d} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)\, dy \tag{1'}$$

в предположении, что f и $\frac{\partial f}{\partial x}$ непрерывны на $[a, b] \times [c, d]$.

В самом деле, пусть

$$F(x) = \int_{\Omega} f(x, \mathbf{y})\, d\mathbf{y},$$

тогда

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \int_{\Omega} \frac{1}{h}\,[f(x+h, \mathbf{y}) - f(x, \mathbf{y})]\, d\mathbf{y} =$$

$$= \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x}(x + \theta h, \mathbf{y})\, d\mathbf{y} \to \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x}(x, \mathbf{y})\, d\mathbf{y} \quad (h \to 0,\ \ 0 < \theta < 1),$$

потому что

$$\left|\int_{\Omega}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x + \theta h, \mathbf{y}) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, \mathbf{y})\right] d\mathbf{y}\right| \leqslant \int_{\Omega} \omega\left(|h|, \frac{\partial f}{\partial x}\right) d\mathbf{y} =$$

$$= |\Omega|\, \omega\left(|h|, \frac{\partial f}{\partial x}\right) \to 0 \quad (h \to 0),$$

где $\omega\left(\delta, \frac{\partial f}{\partial x}\right)$ — модуль непрерывности $\frac{\partial f}{\partial x}$ на (замкнутом ограниченном) множестве H.

Формулу (1) мы теперь обобщим, однако считая, что $f(x, y)$ есть функция от двух переменных чисел x, y.

Рассмотрим интеграл

$$F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy \quad (a \leqslant x \leqslant b), \tag{2}$$

где функции φ и ψ удовлетворяют неравенству $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$ $(a \leqslant \leqslant x \leqslant b)$ и непрерывно дифференцируемы, а функция $f(x, y)$ от числовых переменных x, y непрерывна вместе со своей частной производной $\frac{\partial f}{\partial x}$ на множестве точек (x, y) (см. еще § 7.11), удовлетворяющих неравенствам $\varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. Покажем, что функция $F(x)$ имеет производную на $[a, b]$, определяемую по формуле

$$F'(x) = f(x, \psi(x))\, \psi'(x) - f(x, \varphi(x))\, \varphi'(x) + \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)\, dy. \tag{3}$$

Для этого введем вспомогательную функцию

$$\Phi(x, u, v) = \int_u^v f(x, y)\, dy, \tag{4}$$

заданную на множестве H точек (x, u, v) определяемом неравенствами $\varphi(x) \leqslant u \leqslant v \leqslant \psi(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$.

Функцию $z = F(x)$ можно рассматривать как сложную функцию $z = \Phi(x, u, v)$, $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, и ее производную можно вычислить по известной формуле

$$F'(x) = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial u} \varphi'(x) + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \psi'(x), \tag{5}$$

где в правой части надо положить $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$.

Однако надо убедиться в том, что частные производные от Φ — непрерывные функции от (x, u, v), и выразить их через f, φ, ψ.

Так как $f(x, y)$ непрерывна по y, то в силу теоремы о производной по верхнему и нижнему пределу интеграла из (4) следует

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} = f(x, v), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial u} = -f(x, u), \tag{6}$$

и при этом правые части (6) в силу непрерывности f непрерывны по (x, u, v), соответственно и левые.

Так как $\frac{\partial f}{\partial x}$ непрерывна по условию, то в силу (1)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\int_u^v f(x, y)\, dy = \int_u^v \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)\, dy \tag{7}$$

(см., впрочем, замечание ниже). Далее, можно формально считать, что $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \gamma(x, u, v; y)$ есть функция от переменных $(x, u, v; y)$. Она, очевидно, зависит непрерывно от этих переменных, а u и v можно считать функциями от (x, u, v):

$$u = \lambda(x, u, v),\ v = \mu(x, u, v),\ (x, u, v) \in H,$$

тоже, очевидно, непрерывными. Поэтому в этих обозначениях

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \int_{\lambda(x,u,v)}^{\mu(x,u,v)} \gamma(x, u, v; y)\, dy.$$

Следовательно, $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ есть непрерывная функция от (x, u, v) (см. § 12.13, теорему 2).

Мы обосновали равенство (5).

Подстановка (6) и (7) в (5) и замена $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$ приводит к формуле (3).

Замечание. Равенство (7), строго говоря, доказано только в точках (x_0, u_0, v_0), для которых

$$\varphi(x_0) < u_0 < v_0 < \psi(x_0). \tag{8}$$

В этом случае можно указать достаточно малое число $\delta > 0$ такое, что прямоугольник $\{|x - x_0| \leqslant \delta,\ u_0 \leqslant y \leqslant v_0\}$ будет принадлежать области определения $f(x, y)$. Это дает возможность применить формулу (1) (при $c = u_0$, $d = v_0$). Если $u_0 = \varphi(x_0)$ или $v_0 = \psi(x_0)$, то такого прямоугольника может и не быть при любом $\delta > 0$. Однако правая часть (7) имеет смысл и непрерывна для всех точек (x, u, v) замкнутого множества H, поэтому частная производная $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$, определенная только для точек (x_0, u_0, v_0) вида (8), продолжается непрерывно на все множество H, если ее положить равной правой части (7). Этим определяется обобщенная производная $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ на H. Теорема о производной сложной функции для обобщенных в этом смысле частных производных верна (см. § 7.11).

§ 13.13. Несобственный интеграл

Пусть G есть открытое измеримое множество n-мерного пространства и точка $\mathbf{x}^0 \in \overline{G}$.

Обозначим через $\omega(\varepsilon) = \{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| \leqslant \varepsilon\}$ шар (замкнутый с центром в $\mathbf{x}^0$ радиуса $\varepsilon > 0$) и введем множество (открытое) $G_\varepsilon = G - \omega(\varepsilon)$.