Так как $\frac{\partial f}{\partial x}$ непрерывна по условию, то в силу (1)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\int_u^v f(x, y)\,dy = \int_u^v \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)\,dy \tag{7}$$

(см., впрочем, замечание ниже). Далее, можно формально считать, что $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \gamma(x, u, v; y)$ есть функция от переменных $(x, u, v; y)$. Она, очевидно, зависит непрерывно от этих переменных, а u и v можно считать функциями от (x, u, v):

$$u = \lambda(x,\ u,\ v),\quad v = \mu(x,\ u,\ v),\quad (x,\ u,\ v) \in H,$$

тоже, очевидно, непрерывными. Поэтому в этих обозначениях

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \int_{\lambda(x,u,v)}^{\mu(x,u,v)} \gamma(x, u, v; y)\,dy.$$

Следовательно, $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ есть непрерывная функция от (x, u, v) (см. § 12.13, теорему 2).

Мы обосновали равенство (5).

Подстановка (6) и (7) в (5) и замена $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$ приводит к формуле (3).

Замечание. Равенство (7), строго говоря, доказано только в точках (x_0, u_0, v_0), для которых

$$\varphi(x_0) < u_0 < v_0 < \psi(x_0). \tag{8}$$

В этом случае можно указать достаточно малое число $\delta > 0$ такое, что прямоугольник $\{|x - x_0| \leqslant \delta,\ u_0 \leqslant y \leqslant v_0\}$ будет принадлежать области определения $f(x, y)$. Это дает возможность применить формулу (1) (при $c = u_0$, $d = v_0$). Если $u_0 = \varphi(x_0)$ или $v_0 = \psi(x_0)$, то такого прямоугольника может и не быть при любом $\delta > 0$. Однако правая часть (7) имеет смысл и непрерывна для всех точек (x, u, v) замкнутого множества H, поэтому частная производная $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$, определенная только для точек (x_0, u_0, v_0) вида (8), продолжается непрерывно на все множество H, если ее положить равной правой части (7). Этим определяется обобщенная производная $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ на H. Теорема о производной сложной функции для обобщенных в этом смысле частных производных верна (см. § 7.11).

§ 13.13. Несобственный интеграл

Пусть G есть открытое измеримое множество n-мерного пространства и точка $\mathbf{x}^0 \in \overline{G}$.

Обозначим через $\omega(\varepsilon) = \{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| \leqslant \varepsilon\}$ шар (замкнутый с центром в $\mathbf{x}^0$ радиуса $\varepsilon > 0$) и введем множество (открытое) $G_\varepsilon = G - \omega(\varepsilon)$.

Согласимся говорить, что *интеграл*

$$\int_G f\,d\mathbf{x} \tag{1}$$

имеет единственную особенность в $\mathbf{x}^0$, если функция f определена на G, не ограничена на G, но ограничена и интегрируема на G_ε, как бы ни было мало $\varepsilon > 0$.

Подчеркнем, что если интеграл (1) имеет (единственную) особенность в точке $\mathbf{x}^0$, то подынтегральная функция $f(\mathbf{x})$ не интегрируема по Риману, ведь она не ограничена на измеримом открытом множестве G (см. теорему 1 § 12.10 и выше).

Если интеграл (1) *имеет единственную особенность в точке* $\mathbf{x}^0$, *то говорят, что он существует как несобственный интеграл, если существует предел*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{G_\varepsilon} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_G f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}. \tag{2}$$

При этом мы теперь уже приписываем выражению (1) число, равное этому пределу — несобственному интегралу от f по G.

Так как при $0 < \delta_1 < \delta_2$

$$\int_{G_{\delta_1}} - \int_{G_{\delta_2}} = \int_{G_{\delta_1}-G_{\delta_2}},$$

то на основании условия Коши существования предела несобственный интеграл (2) при описанных выше условиях существует в том и только том случае, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любых δ_1, δ_2, где $0 < \delta_1,\ \delta_2 < \delta$,

$$\left|\int_{G_{\delta_1}-G_{\delta_2}} f\,d\mathbf{x}\right| < \varepsilon.$$

Отсюда ясно, что если Ω есть произвольное открытое измеримое множество, содержащее в себе точку $\mathbf{x}^0$ и $G_1 = \Omega G$, то интегралы $\int_G f\,dx$ и $\int_{G_1} f\,dx$ одновременно оба существуют или одновременно оба не существуют (рис. 13.21 и 13.22), потому что условие Коши для них одно и то же.

Обратимся к одномерному случаю. Пусть на интервале (одномерном) $(a,\ b)$ задана функция $f(x)$ такая, что интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ имеет единственную особенность в точке $x^0 \in [a,\ b]$.

Если $x^0 = a$ или $x^0 = b$, то введенное здесь определение несобственного интеграла есть обычное его определение, с которым мы уже знакомы (см. § 9.12). Однако, если $x^0 \in (a,\ b)$, т. е. x^0 — внутренняя точка отрезка $[a,\ b]$, то согласно введенному здесь определению несобственный интеграл считается существующим, если существует предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_a^{x^0-\varepsilon} f\,dx + \int_{x^0+\varepsilon}^{b} f\,dx\right) = \int_a^b f\,dx. \tag{3}$$

Но это есть определение одномерного интеграла (по Коши) в смысле главного значения (см. конец § 9.16), а не обычного (риманова) несобственного интеграла, в силу которого требуется существование пределов каждого из интегралов слева в (3) при $\varepsilon \to 0$.

Имеет место очевидное равенство

$$\int_G (Af(\mathbf{x}) + B\varphi(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x} = A\int_G f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} + B\int_G \varphi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \tag{4}$$

(A и B — постоянные), которое, как обычно, надо читать так: *вместе с несобственными интегралами в правой части равенства* (4) *существует также несобственный интеграл в левой его части, равный правой части* (4).

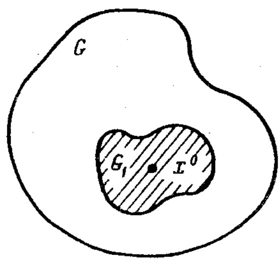

Рис. 13.21.

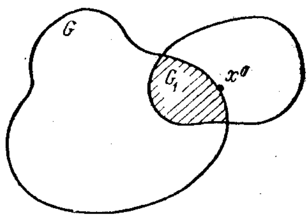

Рис. 13.22.

Если функция f неотрицательна на G, то предел (2), конечный или бесконечный, всегда существует, потому что выражение под знаком предела при монотонном стремлении ε к нулю не убывает.

В случае конечного предела принято писать:

$$\int_G f\,d\mathbf{x} < \infty,$$

а в случае бесконечного —

$$\int_G f\,d\mathbf{x} = \infty.$$

Ясно, что для неотрицательной функции одной переменной при $x^0 \in (a, b)$ определения интеграла в смысле главного значения и несобственного риманова интегралов совпадают — из существования предела суммы слева в (3) следует существование пределов каждого из двух слагаемых этой суммы.

Можно еще, очевидно, сказать, что *несобственный интеграл от неотрицательной на G описанной выше функции существует тогда и только тогда, когда выражение под знаком предела в* (2) *ограничено константой M, не зависящей от $\varepsilon > 0$.*

Можно дать еще одно эквивалентное определение: *несобственный интеграл по G от неотрицательной функции с единственной особенностью в точке $\mathbf{x}^0 \in \bar{G}$ есть предел*

$$\int_G f\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{G-\lambda_n} f\,dx, \tag{5}$$

где λ_n — области, обладающие следующими свойствами:

1) $\mathbf{x}^0 \in \lambda_n$,
2) $\lambda_n \supset \lambda_{n+1}$,
3) *диаметр* $d(\lambda_n) \to 0$ $(n \to \infty)$.

Если на G заданы две неотрицательные функции f и φ, интегралы от которых имеют единственную особенность в $\mathbf{x}^0$, и $f(\mathbf{x}) \leqslant \varphi(\mathbf{x})$ $(\mathbf{x} \in G)$, то для любого $\varepsilon > 0$

$$\int_{G_\varepsilon} f\,d\mathbf{x} \leqslant \int_{G_\varepsilon} \varphi\,d\mathbf{x}.$$

Обе части этого неравенства монотонно возрастают при убывании ε, поэтому после перехода к пределу при $\varepsilon \to 0$ получим неравенство

$$\int_G f\,d\mathbf{x} \leqslant \int_G \varphi\,d\mathbf{x}, \tag{6}$$

члены которого могут быть конечными и бесконечными. Из конечности интеграла справа в (6) следует конечность интеграла слева, а из бесконечности интеграла слева в (6) следует бесконечность интеграла справа.

Интеграл (1), имеющий единственную особенность в конечной точке $\mathbf{x}^0$, называется *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл

$$\int_G |f|\,d\mathbf{x} < \infty \tag{7}$$

от абсолютной величины $f(\mathbf{x})$. Если интеграл (1) абсолютно сходится, то он сходится, потому что из (7) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$\varepsilon > \int_{G_{\delta_1}-G_{\delta_2}} |f|\,d\mathbf{x} \geqslant \left| \int_{G_{\delta_1}-G_{\delta_2}} f\,d\mathbf{x} \right|, \quad 0 < \delta_1 < \delta_2 < \delta.$$

Пример 1. Рассмотрим интеграл

$$\int_\Omega \frac{d\mathbf{x}}{r^\alpha}, \tag{8}$$

где $r=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$ и Ω — единичный шар в n-мерном пространстве с центром в начале координат.

При $\alpha>0$ (8) есть, очевидно, несобственный интеграл с единственной особенностью в нулевой точке. Его величина определяется как предел

$$\int\limits_\Omega \frac{d\mathbf{x}}{r^\alpha}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\frac{d\mathbf{x}}{r^\alpha}.$$

Переход к полярным координатам

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\varphi_1,\\ x_2 &= r\sin\varphi_1\cos\varphi_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_{n-1} &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1},\\ x_n &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1} \end{aligned}$$

с якобианом

$$I=r^{n-1}\sin\varphi_1^{n-2}\sin\varphi_2^{n-3}\ldots\sin\varphi_{n-2}$$

приводит к равенству

$$I_\alpha=\sigma_n\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\varepsilon^1 r^{n-\alpha-1}\,dr, \tag{9}$$

где $\sigma_n=2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ есть площадь поверхности сферы единичного шара в n-мерном пространстве.

Из (9) следует, что

$$\begin{aligned} I_\alpha &< \infty, \quad \text{если} \quad \alpha<n,\\ I_\alpha &= \infty, \quad \text{если} \quad \alpha\geqslant n. \end{aligned}$$

Этот пример можно обобщить, рассматривая интеграл

$$\int\limits_\Omega \frac{|\varphi(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x}}{r^\alpha}, \tag{10}$$

где φ — непрерывная функция на Ω. Положим

$$M=\max_{x\in\Omega}|\varphi(\mathbf{x})|.$$

При $\alpha<n$

$$\int\limits_\Omega \frac{|\varphi(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x}}{r^\alpha}\leqslant M\int\limits_\Omega\frac{d\mathbf{x}}{r^\alpha}<\infty,$$

т. е. интеграл (10) абсолютно сходится.

Пусть теперь $\alpha\geqslant n$ и $|\varphi(0)|>0$. Тогда существует шар ω с центром в нулевой точке, настолько малый, что на нем $|\varphi(\mathbf{x})|>\dfrac{|\varphi(0)|}{2}=m>0$. Поэтому

$$\left|\int\limits_\omega \frac{\varphi(\mathbf{x})}{r^\alpha}\,d\mathbf{x}\right|=\int\limits_\omega\frac{|\varphi(\mathbf{x})|}{r^\alpha}\,d\mathbf{x}\geqslant m\int\limits_\omega\frac{1}{r^\alpha}\,d\mathbf{x}=\infty,$$

и, следовательно, интеграл (10) при $\alpha\geqslant n$ расходится.

Понятие кратного интеграла в смысле Римана определяется для измеримой, следовательно, ограниченной области. Если область неограничена, то при известных условиях можно ввести понятие несобственного интеграла.

Пусть в n-мерном пространстве задано неограниченное множество G, обладающее тем свойством, что любой шар $\omega(R)$ с центром в нулевой точке и радиуса R пересекается с G по измеримому множеству $G(R)=G\omega(R)$. Пусть, далее, на G определена функция $f(\mathbf{x})$, интегрируемая на $G(R)$ для любого R. В этом случае будем говорить, что f имеет единственную особенность в бесконечно удаленной точке (или на бесконечности), и определим несобственный интеграл от f на G как предел

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{G(R)} f\,d\mathbf{x}=\int\limits_G f\,d\mathbf{x}. \tag{11}$$

Все, что мы говорили о несобственном интеграле с единственной особенностью в конечной точке $\mathbf{x}^0$, можно повторить с понятными видоизменениями для несобственного интеграла, имеющего единственную особенность на бесконечности. Нет необходимости это делать.

Пример 2. Интеграл

$$I_\alpha=\int\limits_{r>1}\frac{d\mathbf{x}}{r^\alpha}=\lim_{R\to\infty}\int\limits_{1<r<R}\frac{d\mathbf{x}}{r^\alpha}$$

с помощью введения полярных координат сводится к выражению

$$I_\alpha=\sigma_n\lim_{R\to\infty}\int\limits_1^R r^{n-\alpha-1}\,dr=\begin{cases}\dfrac{\sigma_n}{n-\alpha}, & \alpha>n,\\ \infty, & \alpha\leqslant n.\end{cases}$$

Наконец, может быть более общий случай, когда замыкание области G, где задана функция f, может быть разбито на конечное число попарно пересекающихся разве что по своим границам замыканий открытых множеств

$$\overline{G}=\overline{G}_1+\ldots+\overline{G}_N. \tag{12}$$

При этом каждый из интегралов $\int\limits_{G_j} f\,d\mathbf{x}$ имеет единственную особенность (особую точку $\mathbf{x}^j$), и если G неограничена, то только один из них имеет в качестве особой точки бесконечно удаленную. Кроме того, все точки $\mathbf{x}^j$ различны.

Несобственный интеграл от f на G определяется как сумма

$$\int\limits_G f\,dx=\sum_{j=1}^N\int\limits_{G_j} f\,dG. \tag{13}$$

Если хотя бы один интеграл, входящий в эту сумму, расходится, то интеграл слева в (13) считается расходящимся. Подобным образом этот последний считается абсолютно сходящимся тогда и только тогда, когда абсолютно сходятся все интегралы, входящие в сумму (13).

Мы не будем приводить простые рассуждения, показывающие, что сделанное определение приводит к результату (числу), независимому от возможных способов разбиения G на части.

Пример 3. Очевидно, что интеграл $\int\limits_{R_n} \frac{d\mathbf{x}}{r^\alpha}$, где R_n — все n-мерное пространство, расходится при любом действительном α.

Пример 4. Интеграл

$$I = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy$$

можно определить как предел

$$I = \lim_{N\to\infty} \int\limits_0^N \int\limits_0^N e^{-x^2-y^2} dx\, dy = \lim_{N\to\infty} \int\limits_0^N e^{-x^2} dx \int\limits_0^N e^{-y^2} dy = \left(\int\limits_0^\infty e^{-x^2} dx\right)^2,$$

где несобственный интеграл от одной переменной справа сходится. Но если $\Omega(N)$ есть четверть круга из первого квадранта с центром в начальной точке радиуса N и (ρ, θ) — полярные координаты точек плоскости, то

$$I = \lim_{N\to\infty} \int\limits_{\Omega(N)}\int e^{-\rho^2} \rho\, d\rho\, d\theta = \lim_{N\to\infty} \int\limits_0^{\pi/2} d\theta \frac{1}{2} \int\limits_0^N e^{-\rho^2} d(\rho^2) = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Отсюда

$$\int\limits_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Пример 5. Функция $\psi(x)$, равная $e^{-|\mathbf{x}|}$ в точках $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ с иррациональными координатами и $-e^{-|\mathbf{x}|}$ в остальных точках n-мерного пространства R_n, не является абсолютно интегрируемой, несмотря на то что интеграл

$$\int\limits_{R_n} |\psi|\, d\mathbf{x} < \infty$$

сходится. Ведь $\psi(\mathbf{x})$ всюду разрывна на R_n.

Упражнение Проверить, сводя вопрос к полярным координатам, что для фундаментального решения уравнения теплопроводности v (§ 7.7, упражнение)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} v\, dx\, dy\, dz = 1 \qquad (t_0 > t).$$

Замечание. Пусть ограниченная область Ω имеет дважды непрерывно дифференцируемую гладкую границу S. Обозначим через S_λ принадлежащую Ω поверхность, отстоящую по направлению внутренних нормалей к S на расстоянии $\lambda > 0$ (см. § 7.25), и пусть $\Omega_\lambda \subset \Omega$ — область с границей S_λ.

Если на Ω задана неограниченная функция $f(\mathbf{x})$, но интегрируемая на Ω_λ при любом достаточно малом $\lambda > 0$, то можно определить несобственный интеграл от f на Ω как предел

$$\int_\Omega f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \lim_{\lambda \to 0} \int_{\Omega_\lambda} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x},$$

если он существует.

На основе этого определения можно ввести также понятие абсолютно сходящегося интеграла.

Данное определение несобственного интеграла для функции, имеющей особенности вдоль границы области, по идее соответствует определению (2), рассматриваемому в этом параграфе. Более жесткое определение было дано в § 12.22. Для неотрицательной функции оба они для указанной здесь области, конечно, совпадают. Но данное определение является более общим, потому что можно показать, что если интеграл в смысле § 12.22 сходится, то он сходится абсолютно. Данное определение уже применялось при выводе обобщенной теоремы Гаусса — Остроградского (см. конец § 13.5, §§ 13.6, 13.10).

§ 13.14. Равномерная сходимость несобственного интеграла

Пусть $\Omega \subset R_m$ и $D \subset R_n$ — множества m- и n-мерных пространств, а D, кроме того, измерима. Пусть еще $\mathbf{y}^0 \in \overline{D}$ и ω_δ обозначает открытый шар радиуса δ с центром в $\mathbf{y}^0$.

Рассмотрим интеграл

$$F(\mathbf{x}) = \int_D f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\,d\mathbf{y} \qquad (\mathbf{x} \in \Omega), \tag{1}$$

имеющий единственную особенность в точке $\mathbf{y}^0$. Таким образом, $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ неограничена по $\mathbf{y}$ на D, однако ограничена и интегрируема на $D \backslash \omega_\delta$ при любом $\delta > 0$. По определению *интеграл* (1) *равномерно сходится* относительно $\mathbf{x} \in \Omega$, если он сходится для любого $\mathbf{x} \in \Omega$ и для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta_0 > 0$ такое, что при любом δ, удовлетворяющем неравенствам $0 < \delta < \delta_0$, имеет место ($D\omega_\delta = D \cap \omega_\delta$)

$$\left| \int_{D\omega_\delta} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\,d\mathbf{y} \right| \leqslant \varepsilon \tag{2}$$

для любого $\mathbf{x} \in \Omega$. Здесь важно, что δ_0 (и δ) не зависит от $\mathbf{x} \in \Omega$.

Введем для положительного $\delta > 0$ интеграл

$$F_\delta(\mathbf{x}) = \int_{\overline{D} \backslash \omega_\delta} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\,d\mathbf{y},$$