лению внутренних нормалей к $S$ на расстоянии $\lambda > 0$ (см. § 7.25), и пусть $\Omega_\lambda \subset \Omega$ — область с границей $S_\lambda$.

Если на $\Omega$ задана неограниченная функция $f(\mathbf{x})$, но интегрируемая на $\Omega_\lambda$ при любом достаточно малом $\lambda > 0$, то можно определить несобственный интеграл от $f$ на $\Omega$ как предел

$$\int_\Omega f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \lim_{\lambda\to 0} \int_{\Omega_\lambda} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x},$$

если он существует.

На основе этого определения можно ввести также понятие абсолютно сходящегося интеграла.

Данное определение несобственного интеграла для функции, имеющей особенности вдоль границы области, по идее соответствует определению (2), рассматриваемому в этом параграфе. Более жесткое определение было дано в § 12.22. Для неотрицательной функции оба они для указанной здесь области, конечно, совпадают. Но данное определение является более общим, потому что можно показать, что если интеграл в смысле § 12.22 сходится, то он сходится абсолютно. Данное определение уже применялось при выводе обобщенной теоремы Гаусса — Остроградского (см. конец § 13.5, §§ 13.6, 13.10).

## § 13.14. Равномерная сходимость несобственного интеграла

Пусть $\Omega \subset R_m$ и $D \subset R_n$ — множества $m$- и $n$-мерных пространств, а $D$, кроме того, измерима. Пусть еще $\mathbf{y}^0 \in \overline{D}$ и $\omega_\delta$ обозначает открытый шар радиуса $\delta$ с центром в $\mathbf{y}^0$.

Рассмотрим интеграл

$$F(\mathbf{x}) = \int_D f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{y} \qquad (\mathbf{x} \in \Omega), \tag{1}$$

имеющий единственную особенность в точке $\mathbf{y}^0$. Таким образом, $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ неограничена по $\mathbf{y}$ на $D$, однако ограничена и интегрируема на $D\setminus\omega_\delta$ при любом $\delta > 0$. По определению *интеграл* (1) *равномерно сходится* относительно $\mathbf{x} \in \Omega$, если он сходится для любого $\mathbf{x} \in \Omega$ и для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta_0 > 0$ такое, что при любом $\delta$, удовлетворяющем неравенствам $0 < \delta < \delta_0$, имеет место ($D\omega_\delta = D \cap \omega_\delta$)

$$\left| \int_{D\omega_\delta} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{y} \right| \leqslant \varepsilon \tag{2}$$

для любого $\mathbf{x} \in \Omega$. Здесь важно, что $\delta_0$ (и $\delta$) не зависит от $\mathbf{x} \in \Omega$.

Введем для положительного $\delta > 0$ интеграл

$$F_\delta(\mathbf{x}) = \int_{\overline{D}\setminus\omega_\delta} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{y},$$

очевидно, не имеющий особенностей. Неравенство (2) можно переписать так:

$$|F(\mathbf{x}) - F_\delta(\mathbf{x})| = \left| \int\limits_{\omega_\delta} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{y} \right| < \varepsilon,$$

и мы получим, что для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое $\delta_0$, что для всех $\delta$, удовлетворяющих неравенствам $0 < \delta < \delta_0$, и любых $\mathbf{x} \in \Omega$

$$|F(\mathbf{x}) - F_\delta(\mathbf{x})| < \varepsilon.$$

Но это свойство, как мы знаем, выражает, что

$$\lim_{\delta \to 0} F_\delta(x) = F(\mathbf{x}) \quad \text{равномерно на} \quad \Omega \tag{3}$$

Очевидно, и наоборот — из (3) следует (2).

Таким образом, равенство (3) можно рассматривать как другое эквивалентное определение равномерной сходимости интеграла (1) на $\Omega$.

Справедлива теорема.

Теорема 1. *Если функция $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ непрерывна на $\overline{\Omega} \times \overline{D}$, за исключением точек $(\mathbf{x}, \mathbf{y}^0)$, и интеграл (1) равномерно сходится относительно $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$, то он есть непрерывная функция от $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$.*

Доказательство. Из условия теоремы следует, что функция $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ непрерывна в точках $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, принадлежащих замкнутому ограниченному множеству

$$\overline{\Omega} \times (\overline{D} \backslash \omega_\delta), \tag{4}$$

где $\overline{D} \backslash \omega_\delta$ к тому же измеримо.

Поэтому функции $F_\delta(\mathbf{x})$ непрерывны на $\overline{\Omega}$ (см. теорему 1 § 12.13). Кроме того, $F_\delta(\mathbf{x}) \to F(\mathbf{x})$ при $\delta \to 0$ равномерно на $\overline{\Omega}$. Но тогда на основании теоремы 2 § 11.7 функция $F(\mathbf{x})$ непрерывна на $\overline{\Omega}$.

Правда, эта теорема была доказана для последовательности функций $\{f_n\}$, зависящих от натурального параметра $n$, но она, очевидно, верна и доказательство ее аналогично, если считать, что $n$ непрерывно стремится к некоторому числу $n_0$.

Теорема 2. *При условиях теоремы 1 и если $\Omega$ измеримо (в $R_m$), функцию $F(\mathbf{x})$:*

$$F(\mathbf{x}) = \int\limits_D f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{y} \quad (\mathbf{x} \in \overline{\Omega}) \tag{5}$$

*можно интегрировать по $\Omega$ под знаком интеграла:*

$$\int\limits_\Omega F(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int\limits_D d\mathbf{y} \int\limits_\Omega f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{x}. \tag{6}$$

Доказательство. Из доказательства теоремы 1 мы знаем, что при условиях этой теоремы функции $F_\delta(\mathbf{x})$ и $F(\mathbf{x})$ непрерывны на $\Omega$ и $F_\delta(\mathbf{x}) \to F(\mathbf{x})$, $\delta \to 0$ равномерно на $\Omega$. Это значит, что

$$\eta_\delta = \max_{x \in \Omega} | F_\delta(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x}) | \to 0, \quad \delta \to 0. \tag{7}$$

Но тогда

$$\int_\Omega F_\delta(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \to \int_\Omega F(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \quad \delta \to 0, \tag{8}$$

потому что

$$\left| \int_\Omega F_\delta(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} - \int_\Omega F(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \right| \leqslant \int_\Omega | F_\delta(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x}) |\, d\mathbf{x} \leqslant$$
$$\leqslant \eta_\delta |\Omega| \to 0, \quad \delta \to 0. \tag{9}$$

Из (7) следует:

$$\int_{D \setminus \omega_\delta} d\mathbf{y} \int_\Omega f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{x} = \int_\Omega d\mathbf{x} \int_{D \setminus \omega_\delta} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{y} =$$
$$= \int_\Omega F_\delta(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \to \int_\Omega F(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_\Omega d\mathbf{x} \int_D f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{y}, \quad \delta \to 0, \tag{10}$$

что доказывает равенство (6).

Первое равенство в цепи (10) при любом $\delta > 0$ представляет собой обычную перестановку интегралов по $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ для функции $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ непрерывной на замкнутом измеримом множестве $\Omega \times \times (\overline{D} \setminus \omega_\delta)$ (см. § 12.12).

Заметим, что интеграл по $\mathbf{y}$ в правой части (6) есть несобственный интеграл с единственной особой точкой $\mathbf{y}^0 \in \overline{\Omega}$. Существование его доказано.

Т е о р е м а 3. *Пусть $G$ есть открытое измеримое множество пространства $R_n$, $\mathbf{y}^0 \in \overline{G}$ и $[a, b]$ — отрезок изменения числовой переменной $x$. Пусть, далее, функция $f(x, \mathbf{y})$ непрерывна и имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial f}{\partial x}$ всюду на множестве $[a, b] \times \times \overline{G}$ ($x \in [a, b]$, $\mathbf{y} \in \overline{G}$), за исключением, быть может, точек вида $(x, \mathbf{y}^0)$, в окрестности которых $f(x, \mathbf{y})$ вообще неограничена.*

*Тогда, если интеграл*

$$F(x) \quad \int_G f(x, \mathbf{y})\, d\mathbf{y} \quad (a \leqslant x \leqslant b) \tag{11}$$

*сходится и интеграл*

$$F_1(x) = \int_G \frac{\partial}{\partial x} f(x, \mathbf{y})\, d\mathbf{y} \tag{12}$$

*равномерно сходится относительно $x \in [a, b]$, то интеграл (11) равномерно сходится на $[a, b]$ и*

$$F'(x) = F_1(x), \tag{13}$$

*т. е. законно дифференцировать $F$ под знаком интеграла:*

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_G f(x, \mathbf{y})\,d\mathbf{y} = \int_G \frac{\partial}{\partial x} f(x, \mathbf{y})\,d\mathbf{y}. \tag{14}$$

Доказательство этой теоремы основано на следующей теореме, которая уже была доказана (см. § 11.8, теорема 3).

Теорема 4. *Пусть задана последовательность непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций $S_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, сходящаяся по крайней мере в одной точке этого отрезка, и пусть последовательность производных $S_n'(x)$ равномерно на $[a, b]$ сходится к некоторой функции $\varphi(x)$. Тогда последовательность $\{S_n(x)\}$ сходится во всех точках $[a, b]$ и притом равномерно на $[a, b]$ к некоторой непрерывно дифференцируемой функции $S(x)$ и $S'(x) = \varphi(x)$.*

В этой формулировке на самом деле можно считать, что $n$ стремится непрерывно к некоторому числу $n_0$ или пробегая последовательность чисел $n_k$.

Доказательство теоремы 3. Для $\delta > 0$ положим

$$F_\delta(x) = \int_{G\setminus\omega_\delta} f(x, \mathbf{y})\,d\mathbf{y}.$$

Тогда (см. § 13.12)

$$\frac{\partial}{\partial x} F_\delta(x) = \int_{G\setminus\omega_\delta} \frac{\partial}{\partial x} f(x, \mathbf{y})\,d\mathbf{y} = F_{1\delta}(x),$$

потому что $f$ и $\frac{\partial f}{\partial x}$ непрерывны на $\overline{G}\setminus\omega_\delta$.

По условию для некоторого $x$

$$F_\delta(x) \to F(x), \quad \delta \to 0, \quad x \in [a, b]. \tag{15}$$

Кроме того, в силу равномерной сходимости интеграла (12),

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{\partial}{\partial x} F_\delta(x) = \lim_{\delta\to 0} F_{1\delta}(x) = F_1(x) \tag{16}$$

равномерно на $[a, b]$.

Из (15) и (16) на основании теоремы 4 следует, что $F(x)$ имеет на $[a, b]$ производную, равную $F_1(x)$.

Во всех доказанных теоремах существенную роль играло свойство несобственного интеграла быть равномерно сходящимся относительно параметра. Если это свойство не имеет места, то интеграл называется *неравномерно сходящимся* относительно параметра. Для неравномерно сходящихся интегралов, вообще говоря, указанные три теоремы не верны.

Важным критерием равномерной сходимости интеграла является *критерий Вейерштрасса*. Его можно сформулировать в виде следующей теоремы:

Теорема 5. *Пусть интеграл* (1) *имеет особенность в точке* $\mathbf{y}^0 \in \overline{D}$ *для всех* $\mathbf{x} \in \Omega$. *Пусть, кроме того, существует неотрица-*

*тельная функция* $\varphi(\mathbf{y})$ *такая, что*

$$|f(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leqslant \varphi(\mathbf{y}) \text{ для всех } (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Omega \times \overline{D}, \tag{17}$$

*и при этом несобственный интеграл*

$$\int_D \varphi(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} < \infty \tag{18}$$

*существует. Тогда интеграл* (1) *равномерно сходится относительно* $\mathbf{x} \in \overline{G}$.

Доказательство. Из (18) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta_0 > 0$, что

$$\int_{D\omega_\delta} \varphi(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} < \varepsilon \quad (0 < \delta < \delta_0),$$

где $\omega_\delta$ — шар с центром в $\mathbf{y}^0$ радиуса $\delta$. Поэтому в силу (17)

$$\left| \int_{D\omega_\delta} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{y} \right| \leqslant \int_{D\omega_\delta} \varphi(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} < \varepsilon$$

для всех $\mathbf{x} \in \overline{G}$. Теорема доказана.

Пример 1. Интеграл

$$\psi(a) = \int_0^1 x^{a-1} dx \quad (a > 0) \tag{19}$$

существует для любых $a > 0$. При $a > 0$ он, если имеет, то единственную особую точку $x = 0$. Точнее, при $0 < a < 1$ точка $x = 0$ — особая, а при $a \geqslant 1$ на отрезке $[0, 1]$ подынтегральная функция непрерывна и интеграл никаких особенностей не имеет. Но при исследовании остатка интеграла на равномерную сходимость можно не думать о том, является ли точка $x = 0$ на самом деле особой или нет. Здесь важно только знать, что если существует у интеграла особая точка, то она есть $x = 0$.

Остаток интеграла, соответствующий точке $x = 0$, равен

$$\left| \int_0^\delta x^{a-1} dx \right| = \frac{\delta^a}{a}.$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ невозможно подобрать $\delta > 0$ так, чтобы остаток был меньшим $\varepsilon$ для всех $a > 0$, потому что при любом фиксированном $\delta$ $\lim\limits_{a\to 0} (\delta^a/a) = \infty$ $(a > 0)$. Поэтому интеграл (19) сходится неравномерно относительно $a > 0$. Очевидно также, что он неравномерно сходится относительно $a \in (0, a_0)$, где $a_0$ — произвольное фиксированное положительное число.

Однако на полупрямой $a_0 \leqslant a < \infty$ $(a_0 > 0)$, и тем более на конечном отрезке $[a_0, a_1]$, интеграл (19) сходится равномерно, что может быть доказано с помощью признака Вейерштрасса. В самом деле, если $a_0 \leqslant a$, то на отрезке $[0, \delta]$, где $0 < \delta < 1$, $x^{a-1} \leqslant x^{a_0 - 1}$, а интеграл

$$\int_0^\delta x^{a_0-1} dx < \infty$$

сходится.

Функция $\psi(a)$ непрерывна для всех $a > 0$. В самом деле, зададим произвольное $a_0 > 0$, и пусть

$$0 < a_1 < a_0 < a_2.$$

Подынтегральная функция $x^{a-1} = \varphi(x, a)$ непрерывна на прямоугольнике $\Delta = \{0 \leqslant x \leqslant 1,\ a_1 \leqslant a \leqslant a_2\}$, за исключением, быть может, точек с $x = 0$, интеграл (19) равномерно сходится относительно $a \in [a_1, a_2]$. Тогда на основании теоремы 1 $\psi(a)$ непрерывна на $[a_1, a_2]$ и, в частности, в точке $a = a_0$.

Если $a > 0$, то справедлива формула

$$\psi'(a) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial a} x^{a-1} dx = \int_0^1 x^{a-1} \ln x \, dx. \tag{20}$$

Снова, если мы хотим ее проверить для $a = a_0 > 0$, подбираем числа $a_1$, $a_2$ такие, что $0 < a_1 < a_0 < a_2$, и, чтобы применить теорему 3, убеждаемся в равномерной сходимости интеграла (20) относительно $a \in [a_1, a_2]$. Здесь удобно применить признак Вейерштрасса.

Так как $\lim\limits_{x \to 0} x^\lambda \ln x = 0$ $(\lambda > 0)$ и функция $x^\lambda \ln x$ непрерывна на $(0, 1]$, то существует положительная константа $C$ такая, что $|x^\lambda \ln x| \leqslant C$ $(0 < x \leqslant 1)$. Поэтому при $0 < \lambda < a_1$ на отрезке $[0, 1]$

$$|x^{a-1} \ln x| = |x^{a-\lambda-1} x^\lambda \ln x| \leqslant C x^{a-\lambda-1} \leqslant C x^{a_1-\lambda-1}, \quad a \in [a_1, a_2],$$

интеграл справа в (20) равномерно сходится, так как интеграл

$$\int_0^1 C x^{a_1-\lambda-1} dx < \infty$$

сходится. Если еще учесть, что функция $\frac{\partial}{\partial a} x^{a-1} = x^{a-1} \ln x$ непрерывна на прямоугольнике $[0, 1] \times [a_1, a_2]$, за исключением, быть может, точек $(0, a)$, то в силу теоремы 3 равенство (20) верно.

Пример 2. Бэта-функция. Функция

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx \tag{21}$$

называется *бэта-функцией*. Интеграл (21), если имеет особенности, то только в точках $x = 0$ и $x = 1$. Поэтому при изучении равномерной сходимости этого интеграла удобно разложить его на два интеграла:

$$B_1(a, b) = \int_0^{1/2} x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx,$$

$$B_2(a, b) = \int_{1/2}^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx.$$

Интеграл $B_1$, если имеет особую точку, то при $x = 0$. Он сходится при $a > 0$ и любом $b$, потому что

$$\int_0^{1/2} x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx \leqslant M_b \int_0^{1/2} x^{a-1} dx < \infty, \quad M_b = \max_{0 < x < \frac{1}{2}} (1-x)^{b-1},$$

и расходится при $a \leqslant 0$, потому что

$$\int_0^{1/2} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx \geqslant m_b \int_0^{1/2} x^{a-1}dx = \infty, \quad m_b = \min_{1 \leqslant x \leqslant 1/2} (1-x)^{b-1} > 0.$$

Аналогично интеграл $B_2(a, b)$ сходится при $b > 0$ и расходится при $b \leqslant 0$. Поэтому бэта-функция имеет смысл только при $a > 0$ и $b > 0$.

Чтобы показать, что $B_1(a, b)$ непрерывна (относительно $(a, b)$) в точке $(a_0, b_0)$ $(a_0 > 0,\ b_0 > 0)$, определим прямоугольник $\Delta = \{a_1 \leqslant a \leqslant a_2;\ b_1 \leqslant b \leqslant b_2\}$ $(a_1, b_1 > 0)$, строго внутри которого находится точка $(a_0, b_0)$. Остаток интеграла можно оценить следующим образом:

$$\int_0^{\delta} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx \leqslant M_{b_1}\int_0^{\delta} x^{a-1}dx = M_{b_1}\frac{\delta^a}{a} \leqslant M_{b_1}\frac{\delta^{a_1}}{a_1}.$$

Можно для любого $\varepsilon > 0$ указать такое $\delta_0 > 0$, что для $0 < \delta < \delta_0$

$$M_{b_1}\frac{\delta^{a_1}}{a_1} \leqslant \frac{M_{b_1}\delta_0^{a_1}}{a_1} < \varepsilon,$$

т. е. интеграл, определяющий $B_1(a, b)$, равномерно сходится относительно $(a, b) \in \Delta$:

$$\int_0^{\delta} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx < \varepsilon$$

для любых $(a, b) \in \Delta$ и $0 < \delta < \delta_0$, и так как под интегралом стоит непрерывная функция от $(x, a, b)$, $x > 0$, $(a, b) \in \Delta$, то $B_1$ непрерывна в точке $(a_0, b_0)$. Аналогично устанавливается непрерывность $B_2(a, b)$.

Имеет место

$$\frac{\partial}{\partial a}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx = \int_0^1 x^{a-1}\ln x\,(1-x)^{b-1}\,dx \quad (0 < a, b),$$

так как оба интеграла, входящие в это равенство, сходятся, второй же интеграл, как нетрудно показать, равномерно сходится в достаточно малой окрестности точки $a$, и, кроме того, подынтегральная функция в правой части равенства непрерывна относительно $(x, a)$, за исключением точек $(0, a)$. Легко установить, рассуждая аналогично, что существует непрерывная на $[a, b]$ $(a, b > 0)$ частная производная

$$\frac{\partial^{k+l}B}{\partial a^k \partial b^l} = \int_0^1 x^{a-1}\ln^k x\,(1-x)^{b-1}\ln^l(1-x)\,dx$$

при любых $k, l = 0, 1, \ldots$

## § 13.15. Равномерно сходящийся интеграл для неограниченной области

Будем рассматривать интеграл

$$F(x) = \int_D f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\,d\mathbf{y} \qquad (x \in G) \tag{1}$$