и расходится при $a \leqslant 0$, потому что

$$\int_0^{1/2} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx \geqslant m_b \int_0^{1/2} x^{a-1}dx = \infty, \quad m_b = \min_{1 \leqslant x \leqslant 1/2} (1-x)^{b-1} > 0.$$

Аналогично интеграл $B_2(a, b)$ сходится при $b > 0$ и расходится при $b \leqslant 0$. Поэтому бэта-функция имеет смысл только при $a > 0$ и $b > 0$.

Чтобы показать, что $B_1(a, b)$ непрерывна (относительно (a, b)) в точке (a_0, b_0) $(a_0 > 0,\ b_0 > 0)$, определим прямоугольник $\Delta = \{a_1 \leqslant a \leqslant a_2;\ b_1 \leqslant b \leqslant b_2\}$ $(a_1, b_1 > 0)$, строго внутри которого находится точка (a_0, b_0). Остаток интеграла можно оценить следующим образом:

$$\int_0^{\delta} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx \leqslant M_{b_1} \int_0^{\delta} x^{a-1}dx = M_{b_1}\frac{\delta^a}{a} \leqslant M_{b_1}\frac{\delta^{a_1}}{a_1}.$$

Можно для любого $\varepsilon > 0$ указать такое $\delta_0 > 0$, что для $0 < \delta < \delta_0$

$$M_{b_1}\frac{\delta^{a_1}}{a_1} \leqslant \frac{M_{b_1}\delta_0^{a_1}}{a_1} < \varepsilon,$$

т. е. интеграл, определяющий $B_1(a, b)$, равномерно сходится относительно $(a, b) \in \Delta$:

$$\int_0^{\delta} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx < \varepsilon$$

для любых $(a, b) \in \Delta$ и $0 < \delta < \delta_0$, и так как под интегралом стоит непрерывная функция от (x, a, b), $x > 0$, $(a, b) \in \Delta$, то B_1 непрерывна в точке (a_0, b_0). Аналогично устанавливается непрерывность $B_2(a, b)$.

Имеет место

$$\frac{\partial}{\partial a}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx = \int_0^1 x^{a-1}\ln x\,(1-x)^{b-1}\,dx \qquad (0 < a, b),$$

так как оба интеграла, входящие в это равенство, сходятся, второй же интеграл, как нетрудно показать, равномерно сходится в достаточно малой окрестности точки a, и, кроме того, подынтегральная функция в правой части равенства непрерывна относительно (x, a), за исключением точек $(0, a)$. Легко установить, рассуждая аналогично, что существует непрерывная на $[a, b]$ $(a, b > 0)$ частная производная

$$\frac{\partial^{k+l}B}{\partial a^k \partial b^l} = \int_0^1 x^{a-1}\ln^k x\,(1-x)^{b-1}\ln^l(1-x)\,dx$$

при любых $k, l = 0, 1, \ldots$

§ 13.15. Равномерно сходящийся интеграл для неограниченной области

Будем рассматривать интеграл

$$F(x) = \int_D f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\,d\mathbf{y} \qquad (x \in G) \tag{1}$$

на неограниченной области D такой, что при любом $\mathbf{x} \in G$ он имеет бесконечно удаленную точку в качестве единственной особой точки. Говорят, что *интеграл* (1) *равномерно сходится относительно* $\mathbf{x} \in G$, если он сходится для всех $\mathbf{x} \in G$, и для любого $\varepsilon > 0$ можно указать не зависящее от $\mathbf{x}$ достаточно большое R_0 такое, что для любого R, удовлетворяющего неравенству $R > R_0$,

$$\left| \int\limits_{D \setminus \omega_R} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{y} \right| < \varepsilon,$$

где ω_R — шар радиуса R с центром в нулевой точке.

Если функция $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *непрерывна на* $\overline{G} \times D$ *и интеграл* (1) *равномерно сходится относительно* $\mathbf{x} \in \overline{G}$, *то функция* $F(\mathbf{x})$ *непрерывна на* $\overline{G}$. *Если, кроме того,* G — *измеримое множество, то имеет место равенство*

$$\int\limits_G F(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int\limits_G d\mathbf{x} \int\limits_D f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{y} = \int\limits_D d\mathbf{y} \int\limits_G f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{x}. \tag{2}$$

Если теперь x *есть числовая переменная, пробегающая отрезок* $[a, b]$, *и* $f(x, \mathbf{y})$ *непрерывна вместе со своей частной производной* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *на* $[a, b] \times D$, *интеграл* (1) *сходится, а интеграл*

$$F_1(x) = \int\limits_D \frac{\partial}{\partial x} f(x, \mathbf{y})\, d\mathbf{y}$$

равномерно сходится относительно $x \in [a, b]$, *то* $F'(x) = F_1(x)$ *или*

$$\frac{\partial}{\partial x} \int\limits_D f(x, \mathbf{y})\, d\mathbf{y} = \int\limits_D \frac{\partial}{\partial x} f(x, \mathbf{y})\, d\mathbf{y}. \tag{3}$$

Наконец, *если для нашей функции* $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *выполняется неравенство* $|f(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leqslant \varphi(\mathbf{y})$ $(\mathbf{x} \in G)$ *и существует несобственный интеграл* $\int\limits_D \varphi(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}$, *то интеграл* (1) *сходится для любого* $\mathbf{x} \in G$ *и притом равномерно* (*признак Вейерштрасса*).

Указанные утверждения аналогичны соответствующим теоремам 1—4 предыдущего параграфа. Они и доказываются совершенно аналогично. Вообще эти утверждения аналогичны соответствующим теоремам о непрерывности, интегрируемости и дифференцируемости равномерно сходящихся рядов функций. Их можно доказать единым образом, вводя более общие несобственные интегралы (Стилтьеса), содержащие в себе как частные случаи, с одной стороны, рассматриваемые здесь интегралы, а с другой — бесконечные ряды.

Пример 1. Гамма-функция. Интеграл

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx \tag{4}$$

называется *гамма-функцией* или *эйлеровым интегралом первого рода*. Он имеет особую точку $x = \infty$, при $0 < a < 1$ еще особую точку $x = 0$. Поэтому при исследовании его свойств удобно разложить его на два интеграла:

$$\Gamma(a) = \int_0^1 x^{a-1}e^{-x}dx + \int_1^\infty x^{a-1}e^{-x}dx = \varphi_1(a) + \varphi_2(a).$$

Первый интеграл равномерно сходится для всех $a \geqslant a_0 > 0$, каково бы ни было положительное число a_0. В самом деле,

$$x^{a-1}e^{-x} \leqslant x^{a_0-1}\cdot 1 = x^{a_0-1} \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1),$$

и так как интеграл

$$\int_0^1 x^{a_0-1}dx < \infty,$$

то наше утверждение вытекает из критерия Вейерштрасса. Относительно всех $a > 0$ первый интеграл сходится неравномерно, потому что при любом $\delta < 1$

$$\int_0^\delta x^{a-1}e^{-x}dx \geqslant m\int_0^\delta x^{a-1}dx = \frac{m\delta^a}{a} \to \infty \qquad (a \to 0), \qquad m = \min_{0 \leqslant x \leqslant 1} e^{-x},$$

и, таким образом, невозможно для любого $\varepsilon > 0$ подобрать такое δ, чтобы остаток первого интеграла был меньше ε для всех $a > 0$.

Второй интеграл, очевидно, сходится для любого действительного a. Если a_0 — любое число, то для $a \leqslant a_0$

$$x^{a-1}e^{-x} \leqslant x^{a_0-1}e^{-x} \qquad (1 \leqslant x < \infty),$$

и так как

$$\int_1^\infty x^{a_0-1}e^{-x}dx < \infty,$$

то по критерию Вейерштрасса второй интеграл равномерно сходится для всех $a \leqslant a_0$. Однако он не сходится равномерно для всех a, потому что для $N > 1$ и $a > 1$

$$\int_N^\infty x^{a-1}e^{-x}dx \geqslant N^{a-1}\int_N^\infty e^{-x}dx = N^{a-1}e^{-N} \to \infty \qquad (a \to \infty)$$

при любом фиксированном N.

Во всяком случае, доказано, что если $a_0 > 0$, то на отрезке $[a_1, a_2]$ $(0 < a_1 < a_0 < a_2)$ изменения a оба интеграла $\varphi_1(a)$ и $\varphi_2(a)$ равномерно сходятся и в силу очевидных непрерывных свойств подынтегральной функции гамма-функция непрерывна в a_0 (для любых $a_0 > 0$).

Легко проверяется, что интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial a} x^{a-1}e^{-x}dx = \int_0^\infty x^{a-1}\ln x e^{-x}dx \tag{5}$$

распадается на два интеграла (от 0 до 1 и от 1 до ∞), равномерно сходящихся на любом отрезке (a_1, a_2) изменения a, где $a_1 > 0$, откуда в силу непрерывности при $x > 0$ подынтегрального выражения (5)

$$\Gamma'(a) = \int_0^\infty x^{a-1}\ln x e^{-x}dx.$$

Подобным образом доказывается, что

$$\Gamma^{(k)}(a) = \int_0^\infty x^{a-1}(\ln x)^k e^{-x}dx$$

и, таким образом, $\Gamma(a)$ бесконечно дифференцируема ($a > 0$). На самом деле это аналитическая функция от a.

Заметим, что при $a > 1$

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx = \lim_{N\to\infty}\left\{-x^{a-1}e^{-x}\Big|_0^N + (a-1)\int_0^N x^{a-2}e^{-x}dx\right\} =$$

$$= (a-1)\Gamma(a-1). \tag{6}$$

Поэтому при $a = n$ натуральном

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \ldots = n!\,\Gamma(1) = n!\int_0^\infty e^{-x}dx = n!, \tag{7}$$

откуда видно, что гамма-функцию естественно рассматривать как обобщение факториала.

Пример 2. Интеграл

$$A(\lambda) = \int_0^\infty \frac{\sin\lambda x}{x}\,dx \quad (-\infty < \lambda < \infty) \tag{8}$$

имеет особенности в бесконечно удаленных точках ($x = \pm\infty$) и сходится для любого указанного λ. Однако он сходится равномерно на множестве $\lambda_0 \leqslant |\lambda| < \infty$ ($\lambda_0 > 0$) и неравномерно на отрезке $[0, \lambda_0]$. В самом деле, при $\lambda > 0$ его остаточный член

$$R_N(\lambda) = \int_N^\infty \frac{\sin\lambda x}{x}\,dx = \int_N^\infty \frac{\sin\lambda x}{\lambda x}\,d(\lambda x) = \int_{N\lambda}^\infty \frac{\sin z}{z}\,dz =$$

$$= \lim_{M\to\infty}\left\{-\frac{\cos z}{z}\Big|_{N\lambda}^M - \int_{N\lambda}^M \frac{\cos z}{z^2}\,dz\right\} = \frac{\cos N\lambda}{N\lambda} - \int_{N\lambda}^\infty \frac{\cos z\,dz}{z^2},$$

откуда

$$|R_N(\lambda)| \leqslant \frac{1}{N\lambda} + \int_{N\lambda}^{\infty} \frac{dz}{z^2} = \frac{1}{N\lambda} + \frac{1}{N\lambda} = \frac{2}{N\lambda}$$

и (для $\lambda_0 \leqslant \lambda < \infty$)

$$|R_N(\lambda)| \leqslant \frac{2}{N\lambda_0} \to 0, \quad \lambda_0 \to \infty,$$

т. е. для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое N_0, что $|R_N(\lambda)| < \varepsilon$ для всех $N > N_0$, каково бы ни было $\lambda \in [\lambda_0, \infty)$. С другой стороны, не может быть неравенства

$$\left| \int_{N\lambda}^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz \right| < \varepsilon$$

при фиксированном, пусть очень большом, N и для всех $\lambda \in [0, \lambda_0]$, где $\varepsilon > 0$ — любое наперед заданное число. Ведь при фиксированном N и $\lambda \to 0$ левая часть этого неравенства стремится к (см. ниже (10)) интегралу

$$A = \int_0^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz > 0.$$

Имеют место равенства

$$A(\lambda) = \begin{cases} A, & \lambda > 0, \\ 0, & \lambda = 0, \\ -A, & \lambda < 0. \end{cases}$$

Чтобы убедиться в этом, при $\lambda \neq 0$ надо сделать в интеграле (8) подстановку $u = \lambda x$.

Интеграл (8) равномерно сходится для $\lambda \in [N, N']$, где $0 < N < N'$, поэтому, учитывая, что под интегралом стоит непрерывная функция от $(\lambda, x) \in [N, N'] \times [0, \infty)$, получим

$$\int_N^{N'} d\lambda \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda x}{x} dx = \int_0^{\infty} dx \int_N^{N'} \frac{\sin \lambda x}{x} d\lambda = \int_0^{\infty} \frac{\cos Nx - \cos N'x}{x^2} dx. \qquad (9)$$

Мы считаем здесь, что функция $\dfrac{\sin \lambda u}{u}$ равна λ при $u = 0$, и тогда очевидно, что функция $\dfrac{\sin \lambda x}{x} = \dfrac{\sin \lambda x}{\lambda x}\lambda$ от (λ, x) непрерывна в любой точке $(\lambda, 0)$, где $\lambda \in [0, \infty)$.

Равенство (9) верно и при $N = 0$, хотя оно пока не доказано, потому что интеграл (8) сходится неравномерно на $[0, N']$. Но его можно получить переходом к пределу в (9) при $N \to 0$, что законно — ведь разность между значением при $N = 0$ интеграла, стоящего справа в (9), и значением его для какого-либо N равна

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos Nx}{x^2} dx = 2\int_0^1 \frac{\sin^2 \frac{N}{2} x}{x^2} dx + 2\int_1^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{N}{2} x}{x^2} dx = \psi_1(N) + \psi_2(N).$$

При этом $\lim\limits_{N\to 0}\psi_1(N)=\psi_1(0)=0$ в силу непрерывности функции $x^{-2}\sin^2\frac{N}{2}x$ в точках $(N, x)\in[0, 1]\times[0, 1]$ (теорема 1 § 12.13) и $\lim\limits_{N\to 0}\psi_2(N)=\psi_2(0)=0$ в силу непрерывности этой функции в точках $(N, x)\in[0, 1]\times[1, \infty]$ и равномерной сходимости интеграла $\int\limits_1^\infty$ относительно $N\in[0, 1]$ (см. § 13.15).

Если положить в (9) $N=0$, $N'=1$ и учесть, что слева в (9) интеграл по x равен A, то получим

$$A=\int\limits_0^\infty\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx=\int\limits_0^\infty\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 d\left(\frac{x}{2}\right)=\int\limits_0^\infty\frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx. \qquad (10)$$

Пример 3. Докажем равенство

$$I(s)=\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\cos sx\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-\frac{s^2}{4}}\quad(-\infty<s<\infty). \qquad (11)$$

В самом деле,

$$I'(s)=-\int\limits_0^\infty e^{-x^2}x\sin sx\,dx. \qquad (12)$$

Дифференцирование под знаком интеграла здесь законно, потому что несобственные интегралы (11), (12) подчиняются признаку Вейерштрасса

$$\left|e^{-x^2}\cos sx\right|\leqslant e^{-x^2},\qquad \int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx<\infty,$$

$$\left|e^{-x^2}x\sin sx\right|\leqslant xe^{-x^2},\qquad \int\limits_0^\infty xe^{-x^2}dx<\infty,$$

кроме того, подынтегральные функции в (11), (12) непрерывны по (s, x), $s\in(-\infty, \infty)$, $x\in[0, \infty)$.

Интегрируя (12) по частям, получим

$$I'(s)=\frac{1}{2}\,e^{-x^2}\sin sx\Big|_0^\infty-\frac{s}{2}\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\cos sx\,dx=-\frac{s}{2}\,I(s).$$

Здесь $\Big|_0^\infty=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\cdot\Big|_\varepsilon^{1/\varepsilon}\right)$.

Мы получили для $I=I(s)$ дифференциальное уравнение

$$\frac{dI}{ds}=-\frac{s}{2}\,I,$$

решив которое, приняв во внимание, что

$$I(0)=\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(см. § 13.14, пример 4), получим

$$I(s)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-s^2/4},$$

т. е. (11).

Пример 4. Справедливо равенство

$$\int_0^\infty xe^{-x^2}\sin sx\,dx \approx \frac{\sqrt{\pi}}{4}se^{-\frac{s^2}{4}}$$

(указание: проинтегрировать по частям интеграл и воспользоваться равенством (11)).

Упражнения.

1. Проверить, что интеграл (Пуассона для верхней полуплоскости)

$$U(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\frac{y\,dt}{(x-t)^2+y^2},$$

где $\varphi(t)$ — граничная интегрируемая на любом конечном отрезке функция, равномерно сходится вместе со своими частными производными на любом ограниченном замкнутом множестве точек (x, y), принадлежащем верхней полуплоскости ($y>0$!). Доказать, что U — гармоническая в верхней полуплоскости функция. Учесть, что $y/(x^2+y^2)$ есть гармоническая функция для $x^2+y^2>0$.

2. Проверить, что интеграл (Пуассона для круга)

$$U(\rho,\theta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}P_\rho(t-\theta)\,\varphi(t)\,dt$$

(см. § 11.8, пример 3), где $\varphi(t)$ — периода 2π интегрируемая на периоде функция, равномерно сходится на любом круге $\rho<\rho_0$ ($\rho_0<1$) вместе со своими частными производными (по ρ и θ).

§ 13.16. Равномерно сходящийся интеграл с переменной особой точкой

В §§ 13.14, 13.15 мы рассматривали несобственный интеграл

$$F(x)=\int_D f(\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mathbf{y}\quad(\mathbf{x}\in\Omega)\tag{1}$$

с фиксированной особой точкой $\mathbf{y}^0$, не изменяющейся при изменении $\mathbf{x}$. В общем случае особая точка зависит от $\mathbf{x}$ ($\mathbf{y}^0=\alpha(\mathbf{x})$). Например, это явление имеет место в случае объемного