решив которое, приняв во внимание, что

$$I(0)=\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(см. § 13.14, пример 4), получим

$$I(s)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-s^2/4},$$

т. е. (11).

Пример 4. Справедливо равенство

$$\int_0^\infty xe^{-x^2}\sin sx\,dx\approx\frac{\sqrt{\pi}}{4}se^{-\frac{s^2}{4}}$$

(указание: проинтегрировать по частям интеграл и воспользоваться равенством (11)).

Упражнения.

1. Проверить, что интеграл (Пуассона для верхней полуплоскости)

$$U(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\frac{y\,dt}{(x-t)^2+y^2},$$

где $\varphi(t)$ — граничная интегрируемая на любом конечном отрезке функция, равномерно сходится вместе со своими частными производными на любом ограниченном замкнутом множестве точек (x, y), принадлежащем верхней полуплоскости ($y>0$!). Доказать, что U — гармоническая в верхней полуплоскости функция. Учесть, что $y/(x^2+y^2)$ есть гармоническая функция для $x^2+y^2>0$.

2. Проверить, что интеграл (Пуассона для круга)

$$U(\rho,\theta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}P_\rho(t-\theta)\,\varphi(t)\,dt$$

(см. § 11.8, пример 3), где $\varphi(t)$ — периода 2π интегрируемая на периоде функция, равномерно сходится на любом круге $\rho<\rho_0$ ($\rho_0<1$) вместе со своими частными производными (по ρ и θ).

§ 13.16. Равномерно сходящийся интеграл с переменной особой точкой

В §§ 13.14, 13.15 мы рассматривали несобственный интеграл

$$F(x)=\int_D f(\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mathbf{y}\quad(\mathbf{x}\in\Omega)\tag{1}$$

с фиксированной особой точкой $\mathbf{y}^0$, не изменяющейся при изменении $\mathbf{x}$. В общем случае особая точка зависит от $\mathbf{x}$ ($\mathbf{y}^0=\alpha(\mathbf{x})$). Например, это явление имеет место в случае объемного потенциала

$$F(\mathbf{x}) = \int_D \frac{\mu(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}}{r^\lambda} \quad (\mathbf{x} \in R_n), \tag{2}$$

$$0 < \lambda < n, \quad r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \left(\sum_1^n (x_j - y_j)^2\right)^{1/2}.$$

где функция μ непрерывна на $\bar{D}$ — замыкании измеримой области D. Здесь

$$\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \text{ при } \mathbf{x} \in \bar{D},$$

а если $\mathbf{x} \notin \bar{D}$, то интеграл вовсе не имеет особенностей.

Вот еще пример — логарифмический потенциал, представляющий собой криволинейный интеграл

$$\begin{gathered} \Phi(\mathbf{x}) = \int_C \lambda(\xi) \ln \frac{1}{r}\, ds, \\ \mathbf{x} = (x_1, x_2), \end{gathered} \tag{3}$$

где C — гладкий самонепересекающийся контур в плоскости x_1, x_2, $\lambda(\xi)$ — непрерывная функция на C, s — длина дуги C и

$$r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}.$$

Подобным примером может также служить потенциал простого слоя

$$\psi(\mathbf{x}) = \iint_S \frac{\lambda}{r}\, dS. \tag{4}$$

Интеграл (4) взят по гладкой поверхности S, принадлежащей трехмерному пространству точек $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Обычно S есть граница некоторой ограниченной области, λ — непрерывная функция, заданная на S, r — расстояние от точки $\mathbf{x}$ до точки $\mathbf{u} \in S$, по которой производится интегрирование.

Ниже мы исследуем несобственный интеграл с переменной особой точкой следующего вида:

$$\begin{gathered} F(\mathbf{x}) = \int_D K(\mathbf{x} - \mathbf{y}(\mathbf{u}))\, \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u})\, d\mathbf{u}, \\ \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega, \end{gathered} \tag{5}$$

где $\Omega \subset R_n$ — некоторая область, D — измеримая область, принадлежащая другому, вообще m-мерному пространству ($1 \leqslant m \leqslant n$, $D \subset R_m$), $\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ — непрерывная функция от $\mathbf{x} \in \Omega$, $\mathbf{u} \in D$, а $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{u})$ — непрерывно дифференцируемое отображение $\mathbf{u} \in D$ в $\mathbf{y} \in R_n$, описывающее кусок S m-мерного дифференцируемого многообразия в R_n (см. § 17.1). Наконец, $K(\mathbf{z}) = K(z_1, \ldots, z_n)$ —

функция от $\mathbf{z} \in R_n$, непрерывная всюду, за исключением точки $\mathbf{z} = 0$, в окрестности которой K неограничена.

Интегралы (2), (3), (4) суть частные случаи интеграла (5).

По определению будем говорить, что интеграл (5) равномерно сходится на Ω, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что *)

$$\int\limits_{|\mathbf{x}-y(\mathbf{u})|<\delta} |K(\mathbf{x}-\mathbf{y}(\mathbf{u}))\,\alpha(x,\mathbf{u})|\,d\mathbf{u} < \varepsilon \text{ для всех } \mathbf{x} \in \Omega. \tag{6}$$

Здесь интегрирование производится по всем $\mathbf{u} \in \overline{D}$, для которых выполняется неравенство внизу. Конечно, может случиться, что точка $\mathbf{x}$ находится настолько далеко от многообразия S, что множество указанных $\mathbf{u}$ — пустое, и тогда интеграл в (6) равен нулю.

Например, интеграл (2) равномерно сходится, потому что $(|\mu(\mathbf{y})| \leqslant M$, $\mathbf{y} \in \overline{D}$; здесь $\mathbf{y} = \mathbf{u}$, $\mu(\mathbf{y}) = \alpha(x, \mathbf{y})$, $K(\mathbf{z}) = |\mathbf{z}|^{-\lambda})$

$$\int\limits_{|x-y|<\delta} \frac{|\mu(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{\lambda}}\,dy \leqslant M \int\limits_{|x-y|<\delta} \frac{dy}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{\lambda}} = M \int\limits_{|y|<\delta} \frac{d\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|^{\lambda}} < \varepsilon, \tag{7}$$

если δ при избранном ε достаточно мало. Равномерную сходимость интегралов (3), (4) см. ниже.

Теорема 1. *Если интеграл* (5) *с указанными там условиями сходится равномерно на* Ω, *то он сходится и абсолютно и* F — *непрерывная функция от* $\mathbf{x}$ *на* Ω.

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$ и подберем $\delta > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\int\limits_{|x-y(\mathbf{u})|<3\delta} |K(\mathbf{x}-\mathbf{y}(\mathbf{u}))\,\alpha|\,d\mathbf{u} < \varepsilon \quad (\mathbf{x} \in \Omega). \tag{8}$$

Затем, чтобы доказать непрерывность F в $\mathbf{x}^0$, положим

$$F(\mathbf{x}) = F_1(\mathbf{x}) + F_2(\mathbf{x}),$$

где

$$\begin{aligned} F_1(\mathbf{x}) &= \int\limits_{|\mathbf{x}^0-y(\mathbf{u})|<2\delta} K(\mathbf{x}-\mathbf{y}(\mathbf{u}))\,\alpha\,d\mathbf{u},\\ F_2(\mathbf{x}) &= \int\limits_{|\mathbf{x}^0-y(\mathbf{u})|\geqslant 2\delta} K(\mathbf{x}-\mathbf{y}(\mathbf{u}))\,\alpha\,d\mathbf{u} \end{aligned} \tag{9}$$

(интегралы распространены на $\mathbf{u} \in \overline{D}$, для которых выполняется неравенство внизу).

На шаре $\overline{V}$, заданном неравенством $|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0| \leqslant \delta$ функция F_2 непрерывна, потому что интеграл, определяющий F_2, берется по

*) Интеграл (6) берется по открытому множеству и во всяком случае определен корректно в смысле Лебега (см. гл. 19).

замкнутому измеримому множеству $\mathscr{E}$ точек u, а подынтегральная функция от $(\mathbf{x}, u) \in V \times \mathscr{E}$ непрерывна вместе с функцией $K(\mathbf{x} - y(u))$. Ведь

$$|\mathbf{x} - y(u)| \geqslant |\mathbf{x}^0 - y(u)| - |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| \geqslant 2\delta - \delta = \delta > 0.$$

Далее F_1 удовлетворяет на V неравенству

$$|F_1(\mathbf{x})| < \varepsilon.$$

Ведь если

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < \delta, \quad |\mathbf{x}^0 - y(u)| < 2\delta,$$

то

$$|\mathbf{x} - y(u)| < 3\delta.$$

Но тогда F, согласно лемме 1 § 11.7, непрерывна на шаре $|x - x_0| < \delta$.

Интеграл (5) абсолютно сходится вместе с интегралом (6).

Из теоремы 1 и сказанного об объемном потенциале (2) следует, что он есть непрерывная функция от $\mathbf{x} \in R_n$.

Теорема 2. *Справедливо равенство*

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int_D K(\mathbf{x} - \mathbf{y}(\mathbf{u}))\, \mu(\mathbf{u})\, d\mathbf{u} = \int_D \frac{\partial}{\partial x_j} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}(\mathbf{u}))\, \mu(\mathbf{u})\, d\mathbf{u}, \quad (10)$$

где $\mu(\mathbf{u})$ *и ядро* $K(\mathbf{x})$, *так же как продифференцированное ядро*

$$K_1(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_j} K(\mathbf{x}),$$

удовлетворяют условиям, изложенным выше (в связи с (5)), *а* $\mu(\mathbf{u})$ — *функция, непрерывная на* $\overline{D}$.

При $m = 1$ предполагается, что ядро $K(\mathbf{x})$ непрерывно также и при $\mathbf{x} = 0$.

Доказательство этой теоремы основывается на следующей лемме:

Лемма 1. *Пусть* $\psi(x)$, $F(x)$, $F_\delta(x) (0 < \delta < \delta_0)$ — *функции, заданные на интервале* (a, b) *и* $x_0 \in (a, b)$. *При этом* $F_\delta(x)$ *непрерывно дифференцируемы,* $\psi(x)$ *непрерывна и выполняются свойства*

$$F_\delta(x) \to F(x), \quad \delta \to 0, \quad x \in (a, b), \quad (11)$$

и для любого $\varepsilon > 0$ *найдется* $\delta_0 > 0$ *такое, что*

$$|F'_\delta(x) - \psi(x)| < \varepsilon \quad (12)$$

для всех x, δ, *удовлетворяющих неравенствам*

$$|x - x_0| < \delta_0, \quad \delta < \delta_0. \quad (13)$$

Тогда

$$F'(x_0) = \psi(x_0), \quad (14)$$

иначе говоря,

$$\left(\left(\lim_{\delta\to 0} F_\delta(x)\right)'\right)_{x=x_0} = \lim_{\delta\to 0} F'_\delta(x_0). \qquad (14')$$

Доказательство леммы 1. Так как $\psi(x)$ непрерывна, то из (12) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется δ_0 такое, что

$$|F'_\delta(x) - \psi(x_0)| \leqslant |F'_\delta(x) - \psi(x)| + |\psi(x) - \psi(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

для δ, x, удовлетворяющих (13).

Это показывает, что

$$\lim_{\delta\to 0, x\to x_0} F'_\delta(x) = \psi(x_0). \qquad (15)$$

Далее, вследствие непрерывной дифференцируемости $F_\delta(x)$, при любых указанных δ

$$F_\delta(x) = F_\delta(x_0) + (x - x_0) F'_\delta(x_0 + \theta(x - x_0)) \quad (0 < \theta < 1),$$

и в силу (15)

$$\frac{F_\delta(x) - F_\delta(x_0)}{x - x_0} = F'_\delta(x_0 + \theta(x - x_0)) \to \psi(x_0),$$

$$x \to x_0, \quad \delta \to 0.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta_0 > 0$ такое, что для x, δ, удовлетворяющих (13),

$$\left| \frac{F_\delta(x) - F_\delta(x_0)}{x - x_0} - \psi(x_0) \right| < \varepsilon.$$

Теперь для указанных x перейдем к пределу при $\delta \to 0$:

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - \psi(x_0) \right| \leqslant \varepsilon,$$

$$|x - x_0| < \delta.$$

Этим мы доказали (14).

Примечание. Свойство (12) естественно назвать свойством локальной равномерной сходимости $F'_\delta(x)$ к $\psi(x)$ $(\delta \to 0)$ в точке x_0. Если заменить в условии леммы 1 это свойство более сильным — равномерной сходимостью $F'_\delta(x)$ к $\psi(x)$ на Ω, то получаем уже известную нам теорему 4 § 13.14.

Доказательство теоремы 2. Докажем равенство (10) для точки

$$\mathbf{x} = \mathbf{x} \in \Omega.$$

Положим

$$F_\delta(x) = \int_{|\mathbf{x}^0 - \mathbf{y}(\mathbf{u})| \geqslant 2\delta} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}(\mathbf{u}))\, \mu(\mathbf{u})\, d\mathbf{u}, \qquad (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} F_\delta(\mathbf{x}) = \int_{|\mathbf{x}^0 - \mathbf{y}(\mathbf{u})| \geqslant 2\delta} \frac{\partial}{\partial x_j} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}(\mathbf{u}))\, \mu(\mathbf{u})\, d\mathbf{u}. \qquad (17)$$

Мы уже знаем, что для

$$|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|<\delta, \quad |\mathbf{x}^0-\mathbf{y}(\mathbf{u})|\geqslant 2\delta$$

имеет место неравенство

$$|\mathbf{x}^0-\mathbf{y}(\mathbf{u})|\geqslant \delta,$$

показывающее, что подынтегральные функции в (16), (17) непрерывны по x, u. Ведь ядра K и $\frac{\partial K}{\partial x_j}=K_1$ имеют особенность только в нулевой точке пространства R_n. Итак, функции $F_\delta(\mathbf{x})$ и $\frac{\partial}{\partial x_j}F_\delta(\mathbf{x})$ непрерывны для

$$|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|<\delta$$

и дифференцирование под знаком интеграла в (17) законно.

Для любого $\mathbf{x}\in\Omega$ существуют также предельные функции

$$\lim_{\delta\to 0}F_\delta(\mathbf{x})=\int_D K(\mathbf{x}-\mathbf{y}(\mathbf{u}))\,\mu(\mathbf{u})\,d\mathbf{u}=F(\mathbf{x}),$$

$$\lim\frac{\partial}{\partial x_j}F_\delta(\mathbf{x})=\int_D \frac{\partial}{\partial x_j}K(\mathbf{x}-\mathbf{y}(\mathbf{u}))\,\mu(\mathbf{u})\,d\mathbf{u}=\psi(\mathbf{x}).$$

Они непрерывны на основании теоремы 1. В силу условий, наложенных на K_1, для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta_0>0$ такое, что

$$\left|\psi(\mathbf{x})-\frac{\partial}{\partial x_j}F_\delta(\mathbf{x})\right|=\left|\int\limits_{|\mathbf{x}^0-\mathbf{y}(\mathbf{u})|<2\delta}\frac{\partial}{\partial x_j}K(\mathbf{x}-\mathbf{y}(\mathbf{u}))\,\mu(\mathbf{u})\,d\mathbf{u}\right|<\varepsilon$$

для $\mathbf{x}$, δ, удовлетворяющих (13).

Мы видим, что функции $F_\delta(\mathbf{x})$, рассматриваемые как функции от x_i при фиксированных

$$x_k=x_k^0 \quad (k=1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,n),$$

удовлетворяют условиям леммы 1, и потому

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(\mathbf{x}^0)=\psi(\mathbf{x}^0).$$

Мы доказали (10) для любого

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}^0\in\Omega.$$

Интеграл справа в (10) есть функция, непрерывная от $\mathbf{x}$ на $\overline{\Omega}$, таким образом, равномерно непрерывная на Ω. Но тогда доказанное для $\mathbf{x}\in\Omega$ равенство (10) можно распространить и на остальные точки $\mathbf{x}$, если понимать частные производные в обобщенном смысле (см. § 7.11).

Пример 1. При $\lambda < n-1$ объемный потенциал (2) законно дифференцировать под знаком интеграла:

$$F'_{x_j}(x) = \int_D \mu(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r^\lambda} d\mathbf{y} = -\lambda \int_D \mu(\mathbf{y}) \frac{x_j - y_j}{r^{\lambda+2}} d\mathbf{y}. \qquad (18)$$

Здесь наряду с установленными выше фактами, из которых вытекало, что $F(\mathbf{x})$ — непрерывная функция, следует учесть, что подынтегральная функция в (18) имеет вид (5) ($K(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = |\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-\lambda-2}$, $m = n$, $\mathbf{y}(\mathbf{u}) = \mathbf{y}$) со всеми свойствами, которые там отмечались, и интеграл (18) равномерно сходится, потому что

$$\int\limits_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|<\delta} \left| \mu \frac{\partial}{\partial x_j} r^{-\lambda} \right| d\mathbf{y} \leqslant M \int\limits_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|<\delta} \frac{d\mathbf{y}}{r^{\lambda+1}} < \varepsilon$$

для достаточно малого δ.

Пример 2. Логарифмический потенциал (3) есть непрерывная функция от $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. При $\mathbf{x} \notin C$ это следует из простейшей теоремы о непрерывности интеграла по параметру. Поэтому интересно доказать непрерывность $\Phi(\mathbf{x})$ в точках $\mathbf{x} \in C$. Пусть $\mathbf{x}^0 \in C$, не нарушая общности, можно считать, что $\mathbf{x}^0 = (0, 0)$ — начало координат, и при этом в начале координат касательная к C совпадает с осью x_1. Интеграл (3) представим в виде суммы интегралов по C_1 и C_2:

$$F(\mathbf{x}) = \int_{C_1} \mu(\xi) \ln \frac{1}{r} ds + \int_{C_2} \mu(\xi) \ln \frac{1}{r} ds,$$

где C_1 — малый кусок C, содержащий в себе нулевую точку, а

$$C_2 = C - C_1.$$

Ясно, что интеграл по C_2 непрерывен в нулевой точке, так как вблизи нее подынтегральная функция не имеет особенностей. Будем считать, что дуга C_1 настолько мала, что ее уравнение можно записать в явном виде:

$$x_2 = f(x_1) \qquad (|\mathbf{x}| \leqslant a).$$

Интеграл

$$F_1(\mathbf{x}) = \int_{C_1} \mu(\mathbf{x}) \ln \frac{1}{r} ds = \int_{-a}^{a} \ln \frac{1}{\sqrt{(x_1-\xi_1)^2 + (x_2 - f(\xi))^2}} \lambda(\xi_1) d\xi_1, \qquad (19)$$

$$\lambda(\xi_1) = \mu(\xi_1, f(\xi_1)) \sqrt{1 + f'^2(\xi_1)},$$

очевидно, вида (5) ($u = x_1$, $m = 1$, $n = 2$). Его равномерная сходимость относительно точек (x_1, x_2), принадлежащих некоторому шару V с центром в нулевой точке вытекает из следующих оценок ($M \geqslant |\lambda(\xi_1)|$, $|\xi_1| < a$):

$$\left| \int\limits_{\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-f_2(\xi_1))^2}<\delta} \lambda \ln \frac{1}{\sqrt{(x_1-\xi_1)^2 + (x_2 - f(\xi_1))^2}} d\xi_1 \right| \leqslant$$

$$\leqslant M \left| \int\limits_{|x_1-\xi_1|<\delta} \ln \frac{1}{|x_1 - \xi_1|} d\xi_1 \right| = M \left| \int\limits_{|\xi_1|<\delta} \ln \frac{1}{|\xi_1|} d\xi_1 \right| < \varepsilon,$$

где δ достаточно мало.

Пример 3. Непрерывность потенциала простого слоя (4) в точке $\mathbf{x}^0 \in S$ может быть установлена следующим образом. Не нарушая общности, считаем, что $\mathbf{x}^0 = (0, 0, 0)$ есть нулевая точка и при этом плоскость $x_3 = 0$ — касательная в ней к S. Больше того, как выше, рассматриваем интеграл

$$\psi(\mathbf{x}) = \iint\limits_{C_1} \frac{\lambda}{r}\, ds = \iint\limits_{\sigma} \frac{\mu(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1 d\xi_2}{\sqrt{(x-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2 + (x_3 - f(\xi_1, \xi_2))^2}},$$

$$\mu = \lambda \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_2}\right)^2},$$

где $\xi_3 = f(\xi_1, \xi_2)$, описывающая C_1,— непрерывно дифференцируемая функция на некоторой области σ плоскости (ξ_1, ξ_2). Это интеграл типа (5). Его равномерная сходимость следует из того, что соответствующий интеграл, распространенный на точки (ξ_1, ξ_2), для которых выполняется неравенство

$$\sqrt{(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2 + (x_3 - f_3)^2} < \delta,$$

не превышает

$$M \iint\limits_{\sqrt{(x-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2}<\delta} \frac{d\xi_1 d\xi_2}{\sqrt{(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2}} =$$

$$= M \iint\limits_{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}<\delta} \frac{d\xi_1 d\xi_2}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}} < \varepsilon.$$