Глава 14

ЛИНЕЙНЫЕ НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

§ 14.1. Пространство C непрерывных функций

Перед чтением этого параграфа рекомендуем еще раз прочесть §§ 6.1, 6.2 и 6.3. К этому мы сделаем добавление о полноте пространства.

Пусть E есть линейное нормированное пространство и последовательность элементов $\mathbf{x}_n \in E$, сходится к элементу $\mathbf{x} \in E$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $N > 0$, что выполняется неравенство

$$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| < \frac{\varepsilon}{2} \ (n > N).$$

Поэтому, если n, $m > N$, то

$$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\| = \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x} + \mathbf{x} - \mathbf{x}_m\| \leqslant \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_m\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

И мы доказали: если последовательность элементов $\mathbf{x}_n \in E$ сходится к некоторому элементу $\mathbf{x} \in E$, то она удовлетворяет условию Коши: для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое N, что выполняется неравенство $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\| < \varepsilon \quad (n, m > N)$.

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Имеются примеры таких линейных нормированных пространств, что в них можно указать последовательности элементов $\{\mathbf{x}_n\}$, удовлетворяющие условию Коши, но не сходящиеся к какому-либо элементу E. С такими пространствами в будущем мы познакомимся (см. § 19.7), а сейчас сделаем следующее определение.

По определению линейное нормированное пространство E называется *полным*, если любая принадлежащая E последовательность $\{\mathbf{x}_n\}$, удовлетворяющая условию Коши, сходится к некоторому элементу $\mathbf{x} \in E$.

Полное линейное нормированное пространство называют еще *банаховым пространством* *).

Один частный пример банахова пространства нам хорошо известен. Это есть пространство R_1 действительных чисел.

Пространство C. Пусть Ω есть замкнутое ограниченное множество пространства R_n. Совокупность всех непрерывных на Ω

---

*) С. Банах (1892—1945) — польский математик, внесший большой вклад в изучение нормированных пространств.

действительных (комплексных*)) функций $f=f(\mathbf{x})$ $(\mathbf{x}\in\Omega)$ обозначают символом $C=C(\Omega)$. При этом каждой функции $f\in C$ приводят в соответствие число

$$\|f\|_C=\max_{\mathbf{x}\in\Omega}|f(\mathbf{x})| \tag{1}$$

— *норму f в метрике (пространства) C.*

Пространство C непрерывных (на Ω) функций есть линейное нормированное действительное (комплексное) пространство с нулевым элементом $\theta=\theta(\mathbf{x})\equiv 0$.

В самом деле, C есть линейное действительное (комплексное) множество (см. § 6.1). Кроме того (см. § 6.3),

1) $\|f\|_C\geqslant 0$ и из равенства $\|f\|_C=0$ следует, что $f=\theta$;

2) $\|\alpha f\|_C=\max\limits_{\Omega}|\alpha f(\mathbf{x})|=|\alpha|\max\limits_{\Omega}|f(\mathbf{x})|=|\alpha|\|f\|_C$;

3) $\|f+\varphi\|_C=\max\limits_{\Omega}|f(\mathbf{x})+\varphi(\mathbf{x})|\leqslant\max\limits_{\Omega}|f(\mathbf{x})|+\max\limits_{\Omega}|\varphi(\mathbf{x})|=$
$=\|f\|_C+\|\varphi\|_C$.

По определению (1) для функций f, f_1, f_2, ... из C имеют место равенства

$$\|f-f_k\|_C=\max_{x\in\Omega}|f(\mathbf{x})-f_k(\mathbf{x})| \quad (k=1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Если правая часть (2) стремится к нулю при $k\to\infty$, то это значит (см. § 11.7), что последовательность функций $\{f_k\}$ равномерно сходится к f на Ω. Таким образом, *сходимость последовательности функций в пространстве (метрике) C эквивалентна равномерной ее сходимости на Ω.*

Пусть теперь последовательность функций $f_k\in C$ удовлетворяет (в метрике C) условию Коши, т. е. для любого $\varepsilon>0$ найдется такое N, что

$$\varepsilon>\|f_k-f_l\|_C=\max_{\Omega}|f_k(\mathbf{x})-f_l(\mathbf{x})|$$

для всех k, $l>N$. Тогда, как было доказано в § 11.7, последовательность $\{f_k\}$ равномерно, а следовательно, и по норме в C сходится к некоторой функции $f\in C$:

$$\|f_k-f\|_C=\max_{\Omega}|f_k(\mathbf{x})-f(\mathbf{x})|\to 0, \quad k\to\infty.$$

Таким образом, *из того, что последовательность функций $f_k\in C$ удовлетворяет условию Коши, следует, что существует функция $f\in C$, к которой эта последовательность сходится в метрике C, т. е.*

$$\lim_{k\to\infty}f_k=f \quad (\text{в метрике } C).$$

---

*) Комплексная непрерывная функция определяется равенством $f(\mathbf{x})=\varphi(\mathbf{x})+i\psi(\mathbf{x})$, где φ и ψ действительные непрерывные функции. Следовательно, $\max\limits_{x\in\Omega}|f(\mathbf{x})|=\max\limits_{x\in\Omega}(\varphi^2(\mathbf{x})+\psi^2(\mathbf{x}))^{1/2}$.

Мы доказали, что C *есть линейное нормированное полное пространство*, т. е. *банахово пространство.*

§ 14.2. Пространства L', L'_p, L и l_p

Пусть $\Omega \subset R_n$ — открытое множество. Через $L' = L'(\Omega)$ мы обозначим совокупность (*пространство*) функций f (действительных или комплексных), абсолютно интегрируемых на Ω в римановом, вообще говоря, не собственном смысле *). Норма $f \in L'$ определяется как интеграл

$$\|f\|_L = \int_\Omega |f(x)|\, dx. \tag{1}$$

Если $f = \varphi + i\psi$ — комплексная функция, то

$$\int_\Omega |f|\, dx = \int_\Omega \sqrt{\varphi^2 + \psi^2}\, dx.$$

Тем самым автоматически предполагается, что Ω — измеримое (по Жордану) множество, если оно ограничено, а если не ограничено, то Ω — локально измеримое множество, т. е. такое, что измеримы множества $\omega\Omega$, где $\omega \subset R_n$ — произвольный шар.

Но можно еще рассматривать *пространство* $L = L(\Omega)$ *измеримых в лебеговом смысле на* Ω *функций* f, *имеющих конечную норму* (1), *где интеграл понимается в смысле Лебега* (см. гл. 19)**).

Многие факты, которые мы будем получать для функций $f \in L'$, верны или верны с небольшими видоизменениями и для функций $f \in L$. В ряде случаев по этому поводу мы будем делать краткие замечания без доказательств со ссылкой на гл. 19.

Раз уж мы назвали интеграл (1) нормой, то нулевым элементом в ***) $L'(L)$ придется считать любую функцию $\theta = \theta(x)$, для которой

$$\int_\Omega |\theta(x)|\, dx = 0. \tag{2}$$

Функция $\theta(x) \equiv 0$ есть пример такой функции, но не единственный (см. ниже теорему 1). В пространстве $L'(\Omega)(L(\Omega))$, не различаются функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, отличающиеся на $\theta(x)$. Как функции они тождественно не равны на Ω, но они определяют один и тот же элемент пространства $L'(\Omega)$ $(f_1 = f_2)$.

---

*) Если $f \in L'$, то интеграл $\int f\, dx$ имеет конечное число особенностей (см. § 13.13), а $\int_\Omega |f|\, dx < \infty$.

**) В этом случае Ω вообще измеримо или локально измеримо по Лебегу.

***) $f \in L'(L)$ обозначает, что $f \in L'$ или $f \in L$.