Мы доказали, что *C есть линейное нормированное полное пространство*, т. е. *банахово пространство.*

§ 14.2. Пространства L', L'_p, L и l_p

Пусть $\Omega \subset R_n$ — открытое множество. Через $L' = L'(\Omega)$ мы обозначим совокупность (*пространство*) функций f (действительных или комплексных), абсолютно интегрируемых на Ω в римановом, вообще говоря, не собственном смысле *). Норма $f \in L'$ определяется как интеграл

$$\|f\|_L = \int_\Omega |f(x)|\,dx. \tag{1}$$

Если $f = \varphi + i\psi$ — комплексная функция, то

$$\int_\Omega |f|\,dx = \int_\Omega \sqrt{\varphi^2 + \psi^2}\,dx.$$

Тем самым автоматически предполагается, что Ω — измеримое (по Жордану) множество, если оно ограничено, а если не ограничено, то Ω — локально измеримое множество, т. е. такое, что измеримы множества $\omega\Omega$, где $\omega \subset R_n$ — произвольный шар.

Но можно еще рассматривать *пространство $L = L(\Omega)$ измеримых в лебеговом смысле на Ω функций f, имеющих конечную норму* (1), *где интеграл понимается в смысле Лебега* (см. гл. 19)**).

Многие факты, которые мы будем получать для функций $f \in L'$, верны или верны с небольшими видоизменениями и для функций $f \in L$. В ряде случаев по этому поводу мы будем делать краткие замечания без доказательств со ссылкой на гл. 19.

Раз уж мы назвали интеграл (1) нормой, то нулевым элементом в ***) $L'(L)$ придется считать любую функцию $\theta = \theta(x)$, для которой

$$\int_\Omega |\theta(\mathrm{x})|\,d\mathrm{x} = 0. \tag{2}$$

Функция $\theta(x) \equiv 0$ есть пример такой функции, но не единственный (см. ниже теорему 1). В пространстве $L'(\Omega)(L(\Omega))$, не различаются функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, отличающиеся на $\theta(\mathrm{x})$. Как функции они тождественно не равны на Ω, но они определяют один и тот же элемент пространства $L'(\Omega)$ ($f_1 = f_2$).

---

*) Если $f \in L'$, то интеграл $\int f\,dx$ имеет конечное число особенностей (см. § 13.13), а $\int_\Omega |f|\,dx < \infty$.

**) В этом случае Ω вообще измеримо или локально измеримо по Лебегу.

***) $f \in L'(L)$ обозначает, что $f \in L'$ или $f \in L$.

Покажем, что $L'(\Omega)$ ($L(\Omega)$) есть линейное множество и интеграл (1) удовлетворяет всем свойствам нормы. В самом деле,

1) $\|f\|_L \geqslant 0$, а из равенства $\|f\|_L = 0$ следует, что $f = \theta$;

2) если $f \in L'(L)$ и α — число, то и $\alpha f \in L'(L)$ и выполняется равенство

$$\|\alpha f\|_L = \int\limits_\Omega |\alpha f(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x} = |\alpha| \int\limits_\Omega |f(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x} = |\alpha|\,\|f\|_L;$$

3) если $f, \varphi \in L'(L)$, то и $f + \varphi \in L'(L)$ и

$$\|f + \varphi\|_L = \int\limits_\Omega |f(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x} \leqslant \int\limits_\Omega |f(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x} + \int\limits_\Omega |\varphi(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x} = \|f\|_L + \|\varphi\|_L.$$

Если $f, f_1, f_2, \ldots \in L'(L)$, то

$$\|f - f_k\|_L = \int\limits_\Omega |f(\mathbf{x}) - f_k(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x} \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Сходимость $f_k \to f$ в метрике L, таким образом, эквивалентна стремлению к нулю интеграла в правой части (3). В этом случае еще говорят, что f_k стремится к f в среднем на Ω (см. § 6.3).

Однако *пространство L' не полно. Полным является пространство $L = L(\Omega)$ функций, интегрируемых* (*суммируемых*) *по Лебегу на* Ω (см. § 19.3, свойство 20 и § 19.7).

Теорема 1. *Пусть $\theta = \theta(\mathbf{x}) \in L'(\Omega)$. Для того чтобы выполнялось равенство*

$$\int\limits_\Omega |\theta(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x} = 0, \tag{4}$$

необходимо и достаточно, чтобы $\theta(\mathbf{x}) = 0$ во всех точках множества $\Omega' \subset \Omega$, где $\theta(\mathbf{x})$ непрерывна.

Доказательство. Допустим, что выполняется равенство (4) и существует точка $\mathbf{x}^0 \in \Omega'$ непрерывности θ такая, что $|\theta(\mathbf{x}^0)| > 0$. Существует тогда шар $\omega \subset \Omega$ с центром в $\mathbf{x}^0$, на котором $|\theta(\mathbf{x})| > \eta > 0$, и тогда получилось бы противоречие с (4):

$$\int\limits_\Omega |\theta(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x} \geqslant \int\limits_\omega |\theta(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x} \geqslant \eta\,|\omega| > 0.$$

Пусть теперь $\theta \in L'(\Omega)$ и $\theta(\mathbf{x}) = 0$ для всех $\mathbf{x} \in \Omega'$.

Определим множество Ω_ε, полученное выкидыванием из Ω конечного числа шаров радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в особых точках интеграла $\int\limits_\Omega \theta(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$ и выкидыванием внешности шара радиуса $1/\varepsilon$ с центром в нулевой точке.

По теореме Лебега $\Omega \setminus \Omega'$ имеет лебегову меру нуль, поэтому Ω' плотно в Ω, и нижний интеграл, а следовательно, и сам интеграл по Ω_ε от $|\theta(\mathbf{x})|$, равен нулю. Поэтому

$$\int\limits_\Omega |\theta(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\theta(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x} = 0.$$

В лебеговом случае теореме 1 соответствует следующее утверждение (см. § 19.3 свойства 1 и 16):

Пусть $\theta = \theta(\mathbf{x}) \in L(\Omega)$. *Для того чтобы имело место равенство* (4), *где интеграл понимается в смысле Лебега, необходимо и достаточно чтобы функция* $\theta(\mathbf{x})$ *была равна нулю почти всюду на* Ω.

Пространства l_p и L_p. Пусть число p удовлетворяет неравенствам $1 \leqslant p < \infty$. По определению последовательность $\mathbf{a} = \{a_k\}$ чисел (действительных или комплексных) принадлежит пространству l_p, если конечна норма

$$\|\mathbf{a}\|_{l_p} = \left(\sum_1^\infty |a_k|^p\right)^{1/p} < \infty. \tag{5}$$

По определению также функция $f(\mathbf{x})$ (действительная или комплексная), определенная на области $\Omega \subset R_n$, принадлежит пространству $L_p'(\Omega)$ $\left(L_1'(\Omega) = L'(\Omega)\right)$, если интеграл от f на Ω имеет конечное число особенностей и норма

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(\mathbf{x})|^p\, d\mathbf{x}\right)^{1/p} < \infty \tag{6}$$

конечна. Рассматривают также пространство $L_p(\Omega)$ измеримых по Лебегу на Ω функций с конечным лебеговым интегралом (6) (см. гл. 19).

Пусть $\varphi(u)$, $\psi(v)$ $(u, v \geqslant 0)$ — непрерывные функции, равные нулю соответственно при $u = 0$, $v = 0$, строго возрастающие и взаимно обратные.

Рассматривая графики этих функций в плоскости (u, v), легко убедиться в справедливости неравенства

$$ab \leqslant \Phi(a) + \Psi(b) \qquad (a, b \geqslant 0),$$

$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t)\, dt, \quad \Psi(x) = \int_0^x \psi(t)\, dt,$$

которое обращается в равенство, лишь если $\varphi(a) = b$.

В случае, когда $\varphi(u) = u^\alpha$, $\psi(v) = v^{1/\alpha}$ $\left(\alpha > 0,\ 1 + \alpha = p,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$, получим

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad (a, b \geqslant 0),$$

откуда следует, что если

$$\mathbf{a} = \{a_k\} \in l_p, \quad \mathbf{b} = \{b_k\} \in l_q,$$

то

$$\sum_1^\infty |a_k b_k| \leqslant \frac{1}{p}\sum_1^\infty |a_k|^p + \frac{1}{q}\sum_1^\infty |b_k|^q, \tag{7}$$

а также если $f(\mathbf{x}) \in L_p'(\Omega)$ $(L_p(\Omega))$, $\varphi(x) \in L_q'(\Omega)$, $(L_q(\Omega))$, то

$$\int_\Omega |f(\mathbf{x})\,\varphi(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} \leqslant \frac{1}{p}\int_\Omega |f(\mathbf{x})|^p\, d\mathbf{x} + \frac{1}{q}\int_\Omega |\varphi(\mathbf{x})|^q\, d\mathbf{x}. \tag{8}$$

Если применить (7) к последовательностям $\left(\|\mathbf{a}\|_{l_p}, \|\mathbf{b}\|_{l_p} > 0\right)$

$$\frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|_{l_p}} = \left\{\frac{a_k}{\|\mathbf{a}\|_{l_p}}\right\}, \quad \frac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|_{l_q}} = \left\{\frac{b_k}{\|\mathbf{b}\|_{l_q}}\right\},$$

то получим

$$\frac{1}{\|\mathbf{a}\|_{l_p}\|\mathbf{b}\|_{l_p}}\sum_1^\infty |a_k b_k| \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

или

$$\sum_1^\infty |a_k b_k| \leqslant \left(\sum_1^\infty |a_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_1^\infty |b_k|^q\right)^{1/q}, \tag{9}$$

где можно, очевидно, теперь считать также, что один или оба из множителей справа равны нулю.

Аналогично применение (8) к функциям

$$\frac{f(\mathbf{x})}{\|f\|_{L_p(\Omega)}}, \quad \frac{\varphi(\mathbf{x})}{\|\varphi\|_{L_q(\Omega)}}$$

$\left(\|f\|_{L_p(\Omega)}, \|\varphi\|_{L_q(\Omega)} > 0\right)$ приводит к неравенству

$$\frac{1}{\|f\|_{L_p(\Omega)}\|\varphi\|_{L_q(\Omega)}}\int_\Omega |f\varphi|\,dx \leqslant 1$$

или неравенству

$$\int_\Omega |f\varphi|\,dx \leqslant \left(\int_\Omega |f|^p\,d\mathbf{x}\right)^{1/p}\left(\int_\Omega |\varphi|^q\,d\mathbf{x}\right)^{1/q}, \tag{10}$$

верному и если один из множителей справа или оба равны нулю.

Неравенства (9), (10) называются *неравенствами Гёльдера* *). В случае $p = 2$ первое из них называется *неравенством Коши*, а второе — *неравенством Буняковского* **) (см. § 6.2, (7), (9)).

Если $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in l_p$, то

$$\sum_1^\infty |a_k + b_k|^p \leqslant \sum_1^\infty |a_k + b_k|^{p-1}|a_k| + \sum_1^\infty |a_k + b_k|^{p-1}|b_k| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_1^\infty |a_k + b_k|^p\right)^{(p-1)/p}\left(\sum_1^\infty |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_1^\infty |a_k + b_k|^p\right)^{(p-1)/p}\left(\sum_1^\infty |b_k|^p\right)^{1/p},$$

где мы применили неравенство Гёльдера к каждому слагаемому второго члена цепи. Отсюда

$$\left(\sum_1^\infty |a_k + b_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_1^\infty |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_1^\infty |b_k|^p\right)^{1/p} \tag{11}$$

---

*) О. Л. Гельдер (1859—1937) — немецкий математик.

**) В. Я. Буняковский (1804—1889) — русский математик, академик.

Аналогично

$$\int_\Omega |f+\varphi|^p\,d\mathbf{x} \leqslant \int_\Omega |f+\varphi|^{p-1}|f|\,d\mathbf{x} + \int_\Omega |f+\varphi|^{p-1}|\varphi|\,d\mathbf{x} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_\Omega |f+\varphi|^p\,d\mathbf{x}\right)^{(p-1)/p}\left[\left(\int_\Omega |f|^p\,d\mathbf{x}\right)^{1/p} + \left(\int_\Omega |\varphi|^p\,d\mathbf{x}\right)^{1/p}\right]$$

или

$$\left(\int_\Omega |f+\varphi|^p\,d\mathbf{x}\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_\Omega |f|^p\,d\mathbf{x}\right)^{1/p} + \left(\int_\Omega |\varphi|^p\,d\mathbf{x}\right)^{1/p} \tag{12}$$

Неравенства (11), (12) называются *неравенствами Минковского* *).

Соотношения (7)—(12) выражают также утверждение: вместе с правыми частями неравенств конечны и левые. Из них следует, что l_p, $L'_p\,(L_p)$ — *линейные комплексные* или *действительные нормированные пространства.*

Выражения (5), (6) суть банаховы нормы (см. § 6.3), потому что они наряду с (11), (12) обладают свойствами

$$\|\lambda\mathbf{a}\|_{l_p} = |\lambda|\,\|\mathbf{a}\|_{l_p}, \quad \|\lambda f\|_{L_p} = |\lambda|\,\|f\|_{L_p},$$

где λ — произвольное число, и из равенств $\|\mathbf{a}\|_{l_p} = \|f\|_{L_p} = 0$ следует, что $\mathbf{a} = 0$ $(a_k = 0)$, а $f(\mathbf{x}) = 0$ в точках непрерывности (в лебеговой же теории почти всюду).

Таким образом, l_p и $L'_p\,(L_p)$ — нормированные пространства. Нулевой элемент в l_p есть последовательность нулей $(a_k = 0,\ k = 1, 2, \ldots)$, нулевой элемент в L'_p есть функция $\theta(\mathbf{x}) \in L'_p$, равная нулю в ее точках непрерывности, нулевой же элемент в L_p есть функция, почти всюду в смысле лебеговой меры равная нулю.

Отметим, что *если* $f \in L'_p(\Omega)\,(L_p(\Omega))$, *где* Ω — *ограниченное (измеримое) множество, то* $f \in L'(\Omega)\ (L(\Omega))$ и имеет место неравенство (см. (10) при $\varphi = 1$)

$$\int_\Omega |f(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x} = \int_\Omega |f(\mathbf{x})\cdot 1|\,d\mathbf{x} \leqslant |\Omega|^{1/q}\left(\int_\Omega |f(\mathbf{x})|^p\,d\mathbf{x}\right)^{1/p}$$

$$\left(1 < p < \infty,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right). \tag{13}$$

Пространства l_p, $L'_p\,(L_p)$ при $p = 2$ обладают особыми свойствами — в них можно ввести скалярное произведение. С этой точки зрения они специально изучаются в § 14.3 и еще в § 14.6 (пример 1), где, в частности, доказывается, что l_2 — полное пространство. Совершенно аналогично можно доказать, что l_p при любом p есть тоже полное пространство.

§ 14.3. Пространство $L'_2\,(L_2)$

Пусть G есть измеримое (ограниченное) множество и $L_{2,\,r}(G)$ — совокупность всевозможных интегрируемых по Риману на G функций (комплексных или действительных). Очевидно, $L_{2,\,r}(G)$

*) Г. Минковский (1864—1909) — немецкий математик и физик.