Аналогично

$$\int_\Omega |f+\varphi|^p d\mathbf{x} \leqslant \int_\Omega |f+\varphi|^{p-1} |f|\, d\mathbf{x} + \int_\Omega |f+\varphi|^{p-1} |\varphi|\, d\mathbf{x} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_\Omega |f+\varphi|^p d\mathbf{x}\right)^{(p-1)/p} \left[\left(\int_\Omega |f|^p d\mathbf{x}\right)^{1/p} + \left(\int_\Omega |\varphi|^p d\mathbf{x}\right)^{1/p}\right]$$

или

$$\left(\int_\Omega |f+\varphi|^p d\mathbf{x}\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_\Omega |f|^p d\mathbf{x}\right)^{1/p} + \left(\int_\Omega |\varphi|^p d\mathbf{x}\right)^{1/p} \tag{12}$$

Неравенства (11), (12) называются *неравенствами Минковского* *).

Соотношения (7)—(12) выражают также утверждение: вместе с правыми частями неравенств конечны и левые. Из них следует, что l_p, $L'_p\,(L_p)$ — *линейные комплексные* или *действительные нормированные пространства*.

Выражения (5), (6) суть банаховы нормы (см. § 6.3), потому что они наряду с (11), (12) обладают свойствами

$$\|\lambda \mathbf{a}\|_{l_p} = |\lambda|\,\|\mathbf{a}\|_{l_p}, \quad \|\lambda f\|_{L_p} = |\lambda|\,\|f\|_{L_p},$$

где λ — произвольное число, и из равенств $\|\mathbf{a}\|_{l_p} = \|f\|_{L_p} = 0$ следует, что $\mathbf{a} = 0$ $(a_k = 0)$, а $f(\mathbf{x}) = 0$ в точках непрерывности (в лебеговой же теории почти всюду).

Таким образом, l_p и $L'_p\,(L_p)$ — нормированные пространства. Нулевой элемент в l_p есть последовательность нулей ($a_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots$), нулевой элемент в L'_p есть функция $\theta(\mathbf{x}) \in L'_p$, равная нулю в ее точках непрерывности, нулевой же элемент в L_p есть функция, почти всюду в смысле лебеговой меры равная нулю.

Отметим, что *если* $f \in L'_p(\Omega)\,(L_p(\Omega))$, *где* Ω — *ограниченное (измеримое) множество, то* $f \in L'(\Omega)\ (L(\Omega))$ и имеет место неравенство (см. (10) при $\varphi = 1$)

$$\int_\Omega |f(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} = \int_\Omega |f(\mathbf{x})\cdot 1|\, d\mathbf{x} \leqslant |\Omega|^{1/q} \left(\int_\Omega |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x}\right)^{1/p}$$

$$\left(1 < p < \infty,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right). \tag{13}$$

Пространства l_p, $L'_p\,(L_p)$ при $p = 2$ обладают особыми свойствами — в них можно ввести скалярное произведение. С этой точки зрения они специально изучаются в § 14.3 и еще в § 14.6 (пример 1), где, в частности, доказывается, что l_2 — полное пространство. Совершенно аналогично можно доказать, что l_p при любом p есть тоже полное пространство.

§ 14.3. Пространство $L'_2\,(L_2)$

Пусть G есть измеримое (ограниченное) множество и $L_{2,r}(G)$ — совокупность всевозможных интегрируемых по Риману на G функций (комплексных или действительных). Очевидно, $L_{2,r}(G)$

*) Г. Минковский (1864—1909) — немецкий математик и физик.

есть линейное (комплексное или действительное) множество. Любым принадлежащим к $L_{2,r}(G)$ функциям φ, ψ можно привести в соответствие число

$$(\varphi, \psi) = (\varphi, \psi)_G = \int_G \varphi(\mathbf{x})\,\overline{\psi}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}, \tag{1}$$

представляющее собой обычный риманов (собственный) интеграл. Оно удовлетворяет трем свойствам скалярного произведения (см. § 6.2). В самом деле, для $\varphi, \psi, \chi \in L_{2,r}(G)$

1) $\overline{(\varphi, \psi)_G} = \int_G \overline{\varphi}\psi\,d\mathbf{x} = (\psi, \varphi)_G$,

2) $(\alpha\varphi + \beta\psi, \chi) = \alpha(\varphi, \chi)_G + \beta(\psi, \chi)_G$,

3) $(\varphi, \varphi)_G \geqslant 0$ и из равенства $(\varphi, \varphi)_G = 0$ следует, что $\varphi(\mathbf{x}) = \theta(\mathbf{x})$ (см. § 14.2 (2)), где θ — интегрируемая по Риману функция, интеграл от квадрата модуля которой равен нулю. Но тогда, как было показано в § 6.2 для любых двух функций $\varphi, \psi \in L_{2,r}(G)$ имеет место неравенство

$$\int_G |\varphi(\mathbf{x})\,\overline{\psi}(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x} \leqslant \left(\int_G |\varphi(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x}\right)^{1/2} \left(\int_G |\psi(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x}\right)^{1/2}. \tag{2}$$

Пусть теперь Ω есть открытое множество, может быть неограниченное, но такое, что пересечение его с любым шаром есть измеримое множество. Обозначим через $L'_2 = L'_2(\Omega)$ совокупность определенных на Ω комплексных или действительных функций f, интегралы от которых $\int_G f\,d\mathbf{x}$, если имеют, то конечное число особенностей, причем $|f(\mathbf{x})|^2 \in L'(\Omega) = L'$ (см. § 14.2).

Зададим две произвольные функции $\varphi, \psi \in L'_2(\Omega)$. Введем множество Ω_ε $(\varepsilon > 0)$, которое получается из Ω выкидыванием из него конечной системы шаров радиуса ε с центрами в точках, где интегралы от φ и ψ по Ω имеют особенности, и, если Ω неограничено, выкидыванием также шара $|\mathbf{x}| \geqslant \varepsilon^{-1}$. Если интегралы от φ и ψ вовсе не имеют особых точек, то считаем $\Omega_\varepsilon = \Omega$.

Таким образом, $\varphi, \psi \in L_{2,r}(\Omega_\varepsilon)$ при любом $\varepsilon > 0$ и

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |\varphi(\mathbf{x})\,\overline{\psi}(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x} \leqslant \left(\int_{\Omega_\varepsilon} |\varphi(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x}\right)^{1/2} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} |\psi(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x}\right)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int_{\Omega} |\varphi(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x}\right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |\psi(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x}\right)^{1/2},$$

и так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то существует интеграл *)

$$\int_\Omega |\varphi(\mathbf{x})\,\overline{\psi}(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x} \leqslant \left(\int_\Omega |\varphi|^2\,d\mathbf{x}\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |\psi|^2\,d\mathbf{x}\right)^{1/2} \tag{3}$$

*) Это неравенство следует также из § 14.2 (10) при $p = 2$, но здесь оно доказано совершенно другим путем.

Мы доказали, что если $\varphi, \psi \in L_2'(\Omega)$, то $\varphi\bar{\psi} \in L'(\Omega)$ и выполняется неравенство (3). Таким образом, для любых $\varphi, \psi \in L_2'(\Omega)$ имеет смысл интеграл (абсолютно сходящийся)

$$(\varphi, \psi) = \int_\Omega \varphi(\mathbf{x})\,\bar{\psi}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}, \tag{4}$$

понимаемый в римановом, вообще несобственном, смысле. Легко проверяется, что он удовлетворяет трем свойствам скалярного произведения, если считать, что нулевой элемент есть функция $\theta = \theta(\mathbf{x}) \in L_2'$, для которой

$$\int_\Omega |\theta(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x} = 0$$

(см. предыдущий параграф).

Теперь можно, как это пояснено в §§ 6.2, 6.3, ввести для функций $f \in L_2'$ норму

$$\|f\|_{L_2} = \left(\int_\Omega |f|^2\,d\mathbf{x}\right)^{1/2},$$

с которой L_2' становится нормированным пространством. Если последовательность функций $f_k \in L_2'$ сходится по норме к функции $f \in L_2'$, то это значит, что

$$\|f - f_k\|_{L_2} = \left(\int_\Omega |f(\mathbf{x}) - f_k(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x}\right)^{1/2} \to 0, \quad k \to \infty.$$

Говорят в этом случае, что *последовательность* $\{f_k\}$ *сходится к* f *на* Ω *в смысле среднего квадратического.*

Пространство L_2' (так же как L') *не полно. Полным является пространство* $L_2 = L_2(\Omega)$ *измеримых по Лебегу на* Ω *функций с интегрируемым по Лебегу квадратом их модуля. Пространство* L_2 *называют гильбертовым пространством* в честь Гильберта (1862—1943), одного из крупнейших немецких математиков.

Конечно, пространство L_2 более совершенно, чем L_2', но оперирование с L_2 требует знания интеграла Лебега. С другой стороны, L_2' охватывает достаточно широкий класс функций, часто только и нужных.

Заметим, что если функция $f \in L_2'(\Omega)$ и Ω ограничено, то $f \in L'(\Omega)$ (см. § 14.2, (13)). Например, функция $x^{-\alpha} \in L_2'(0, 1) \subset L'(0, 1)$, если $\alpha < 1/2$. При выполнении неравенств $1/2 \leqslant \alpha < 1$ функция $x^{-\alpha}$ не принадлежит к $L_2(0, 1)$, но принадлежит к $L'(0, 1)$. Далее, $x^{-\alpha} \in L_2'(1, \infty)$, если $\alpha > 1/2$, но $x^{-\alpha} \in L'(1, \infty)$, только если $\alpha > 1$.