§ 14.4. Приближение финитными функциями

Носителем функции $\varphi(\mathbf{x})$ называется замыкание множества точек $\mathbf{x}$, где $\varphi(\mathbf{x}) \neq 0$.

Функция $\varphi(\mathbf{x})$ называется *финитной в открытом множестве* $\Omega \subset R_n$, если она определена на R_n и имеет ограниченный носитель F, принадлежащий к $\Omega (F \subset \Omega)$. Ограниченный носитель F часто называют *компактным носителем*, подчеркивая этим названием, что из всякой последовательности точек $\mathbf{x}^k \in F \subset R_n$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке $\mathbf{x}^0 \in F$.

Функцию $\varphi(\mathbf{x})$ мы будем называть *кусочно постоянной*, если существует конечная система не пересекающихся попарно прямоугольников (прямоугольных параллелепипедов с ребрами, параллельными осями координат), на каждом из которых φ постоянна и, кроме того, $\varphi = 0$ вне этих прямоугольников. Эти прямоугольники Δ могут быть замкнутыми, открытыми и полуоткрытыми (одна грань Δ может принадлежать, а другая не принадлежать к Δ).

Очевидно, *кусочно постоянная функция финитна в* R_n.

Справедлива

Теорема 1. *Для всякой функции* $f \in L_p(\Omega)(L_p(\Omega))$ *и всякого* $\varepsilon > 0$ *найдется финитная в* Ω *кусочно постоянная или непрерывная*) функция* φ *такая, что*

$$\int_{\Omega} |f(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x} < \varepsilon \quad (1 \leqslant p < \infty). \tag{1}$$

Доказательство теоремы 1 мы поясним сначала на графиках в случае $p = 1$ и когда функция $f(x)$ задана на оси x.

На рис. 14.1, *а* изображена функция f, имеющая особенности в точках $-\infty$, 0, $+\infty$, которую мы будем считать принадлежащей $L'(-\infty, \infty)$. При достаточно малом $\delta > 0$ и большом N для функции $\psi(x)$, изображенной на том же рис. 14.1, *а* жирной линией, справедливо

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - \psi(x)| \, dx \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

На $(-N, -\delta)$, (δ, N) функция $f(x) = \psi(x)$ изображена непрерывной, но она может быть и разрывной, однако интегрируемой, для нее можно указать ступенчатую функцию $\chi(x)$ с конечным числом ступенек такую, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x) - \chi(x)| \, dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

*) Непрерывная можно заменить на бесконечно дифференцируемая, см. свойство 4 § 18.2.

Остается приблизить $\chi(\mathbf{x})$ непрерывной финитной функцией $\varphi(\mathbf{x})$. Это сделано на рис. 14.1, *б*.

Формальное доказательство теоремы 1 следует из приводимых ниже теорем 2, 3, 4 *).

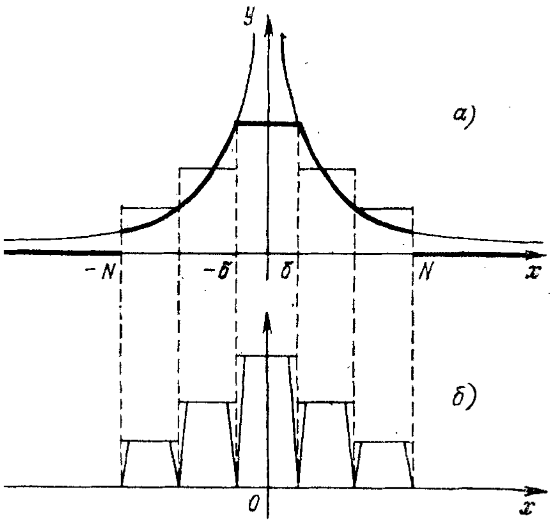

Рис. 14.1.

Теорема 2. *Функцию $f \in L'_p(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$ (см. § 14.2, 14.3) можно приблизить в своей метрике $L'_p(\Omega)$ (с любой степенью точности) ограниченной функцией $\psi \in L'_p(\Omega)$ с компактным носителем.*

Доказательство. Если Ω — ограниченное множество и f ограничена на нем, то можно взять $\psi = f$.

В противном случае интеграл $\int\limits_{\Omega} f\,d\mathbf{x}$ имеет особые точки. Пусть Ω_η ($\eta > 0$) есть множество (ограниченное), получаемое из Ω выкидыванием из него конечной системы шаров (замкнутых) радиуса η с центрами в особых точках интеграла $\int\limits_{\Omega} f\,d\mathbf{x}$ и, если Ω неограничено, выкидыванием еще шара $|\mathbf{x}| \geqslant \eta^{-1}$.

Положим

$$\psi(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{на} \quad \Omega_\eta, \\ 0 & \text{на} \quad \Omega - \Omega_\eta. \end{cases}$$

*) Теорема 1 в случае L (следовательно, и L') вытекает из § 19.3 (свойство 18), а в случае L_p — из § 18.2 (свойство 4) и доказываемой ниже теоремы 4.

Очевидно, ψ есть ограниченная на Ω функция с компактным носителем, принадлежащая к $L'_p(\Omega)$ и, кроме того, при достаточно малом η

$$\int_\Omega |f(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} = \int_{\Omega-\Omega_\eta} |f|^p d\mathbf{x} < \varepsilon. \tag{2}$$

Теорема 3. *Интегрируемую по Риману на открытом множестве Ω функцию f можно приблизить с любой степенью точности в метрике $L_p(\Omega)$ кусочно постоянной финитной в Ω функцией φ, удовлетворяющей неравенству*

$$|\varphi(\mathbf{x})| \leqslant K = \sup_{\mathbf{x}\in\Omega} |f(\mathbf{x})|, \tag{3}$$

если f действительна, и неравенству

$$|\varphi(\mathbf{x})| \leqslant 2K, \tag{4}$$

если f комплексна.

Доказательство. Пусть пока f — действительная функция. Так как она интегрируема на Ω, то для произвольного $\varepsilon > 0$ можно указать прямоугольную h-сетку такую, что нижняя интегральная сумма f, распространенная на кубы Δ_j $(j = 1, \ldots, N)$ сетки, полностью принадлежащие к Ω, отличается от интеграла $\int_\Omega f\,d\mathbf{x}$ менее чем на ε;

$$\int_\Omega f\,d\mathbf{x} - \sum_{j=1}^N m_j |\Delta_j| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad m_j = \inf_{x\in\Delta_j} f(\mathbf{x}).$$

Определим кусочно постоянную функцию (очевидно, удовлетворяющую (3)):

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} m_j & \text{на} \quad \Delta_j, \\ 0 & \text{вне} \quad \sum\limits_1^N \Delta_j = G \end{cases}$$

(чтобы φ была однозначной, можно определить ее на открытых или полуоткрытых Δ). Ясно, что $\varphi(\mathbf{x})$ имеет носитель, принадлежащий к G, и что выполняется неравенство (3). Учитывая, что $\varphi(x) \leqslant f(x)$ на G, получим

$$\int_\Omega |f(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x} = \int_\Omega (f(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x} + \int_{\Omega-G} |f|\,d\mathbf{x} =$$

$$= \left(\int_\Omega f\,d\mathbf{x} - \sum m_j |\Delta_j|\right) + \int_{\Omega-G} (|f| - f)\,d\mathbf{x} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2},$$

если шаг h сетки взять достаточно малым, чтобы выполнялось неравенство

$$\int_{\Omega-G} (|f| - f)\,d\mathbf{x} \leqslant 2\int_{\Omega-G} |f|\,d\mathbf{x} < \frac{\delta}{2}.$$

Это возможно, потому что f ограничена на Ω, а мера $|\Omega - G|$ может быть сделана как угодно малой при достаточно малом h.

Мы доказали теорему для действительной функции f и метрики $L(\Omega)$, докажем ее теперь в случае приближения действительной функции в $L_p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$. Для этого, пользуясь уже доказанным для заданного

$\varepsilon > 0$, подберем кусочно постоянную функцию φ с носителем в Ω, удовлетворяющую неравенству (3), так, чтобы

$$\left(\int\limits_{\Omega} |f(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x}\right)^{1/p} < \frac{\varepsilon}{|\Omega|^{(p-1)/p}(2K)^{(p^2-1)/p}}.$$

Но тогда (см. § 14.2 (10))

$$\int\limits_{\Omega} |f-\varphi|^p\,d\mathbf{x} = \int\limits_{\Omega} |f-\varphi|^{1/p}\,|f-\varphi|^{(p^2-1)/p}\,d\mathbf{x} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{\Omega} |f-\varphi|\,d\mathbf{x}\right)^{1/p}\left(\int\limits_{\Omega} |f-\varphi|^{p+1}\,d\mathbf{x}\right)^{(p-1)/p} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{|\Omega|^{(p-1)/p}(2K)^{(p^2-1)/p}}\left(\int\limits_{\Omega} (2K)^{p+1}\,d\mathbf{x}\right)^{(p-1)/p} = \varepsilon,$$

и теорема доказана и в случае $L'_\varphi(\Omega)$.

Если $f = f_1 + if_2$ — комплексная функция, удовлетворяющая условиям теоремы, то ее действительная и мнимая компоненты f_1 и f_2 тоже удовлетворяют этим условиям. Но для последних уже доказано существование кусочно постоянных действительных функций φ_1, φ_2, соответственно их приближающих (в метрике $L_p(\Omega)$). Но тогда функция $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, очевидно, кусочно постоянная и финитная в Ω, приближает f, и выполняется неравенство (4).

Теорема 4. *Кусочно постоянную функцию $f(\mathbf{x})$ с носителем Ω можно приблизить (с любой степенью точности) в метрике $L_p(\Omega)$ непрерывной функции $\varphi(\mathbf{x})$, финитной в открытом ядре Ω.*

Заметим, что, согласно определению кусочно постоянной функции, Ω есть сумма конечного числа прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат.

Доказательство. Докажем сначала теорему для простейшей кусочно постоянной функции $f(x)$, равной числу m на прямоугольнике Δ и нулю вне его. Пусть $\Delta' \subset \Delta'' \subset \Delta$ — прямоугольники, имеющие тот же центр, что и Δ. Введем непрерывную функцию

$$\varphi_\Delta(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{на } \Delta', \\ 0 & \text{вне } \Delta'', \end{cases} \tag{5}$$

линейную на $\Delta'' - \Delta'$ вдоль лучей, выходящих из центра Δ.

Ясно, что $\varphi_\Delta(\mathbf{x})$ (а вместе с ней и $\varphi(\mathbf{x}) = m\varphi_\Delta(\mathbf{x})$) есть непрерывная финитная в открытом ядре Δ функция. Ясно также, что для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать прямоугольник Δ', а вместе с ним и Δ'', настолько близкий к Δ, что

$$\left(\int\limits_{R_n} |f(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})|^p\,d\mathbf{x}\right)^{1/p} < \varepsilon.$$

В общем случае кусочно постоянную функцию $f(\mathbf{x})$, равную соответственно числам $m_1, \ldots, m_N$ на некоторых непересекающихся (открытых или полуоткрытых) прямоугольниках $\Delta_1, \ldots, \Delta_N$, можно представить в виде суммы

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{1}^{N} f_k(\mathbf{x}), \quad f_k(\mathbf{x}) = m_k \chi_{\Delta_k}(\mathbf{x})$$

функций, где

$$\chi_\Delta(x) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \Delta, \\ 0, & \mathbf{x} \notin \Delta. \end{cases}$$

По доказанному для любого $\varepsilon > 0$ можно указать непрерывные финитные в открытых ядрах Δ_k функции $\varphi_k(\mathbf{x})$ такие, что

$$\int\limits_{R_n} |f_k - \varphi_k|^p \, d\mathbf{x} < \frac{\varepsilon}{N}.$$

Но функция

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sum_1^N \varphi_k(\mathbf{x})$$

непрерывна и финитна в открытом ядре $\sum\limits_1^N \Delta_k$ и

$$\int\limits_{\Sigma\Delta_k} |f - \varphi|^p \, d\mathbf{x} = \int\limits_{R_n} |f - \varphi|^p \, d\mathbf{x} = \sum_{k=1}^N \int\limits_{R_n} |f_k - \varphi_k|^p \, d\mathbf{x} < N \frac{\varepsilon}{N} = \varepsilon,$$

а это и требовалось доказать.

Это рассуждение одинаково как для действительных, так и для комплексных функций.

Итак, в частности, доказано, что всякую функцию $f \in L'_p(\Omega)$ можно приблизить в соответствующей метрике кусочно постоянной функцией вида

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} m_k & \text{на} \quad \Delta_k \quad (k = 1, \ldots, N), \\ 0 & \text{вне} \quad \sum\limits_1^N \Delta_k, \end{cases} \tag{6}$$

где Δ_k — кубы, попарно не пересекающиеся между собой.

Каждая кусочно постоянная функция есть одна из семейства функций

$$\varphi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x};\ \mathbf{x}', \ldots, \mathbf{x}^N, \eta_1, \ldots, \eta_N, m_1, \ldots, m_N),$$

зависящих от N векторных параметров $x^1, \ldots, x^N$ и $2N$ числовых параметров $\eta_1, \ldots, \eta_N$; $m_1, \ldots, m_N$, где $\mathbf{x}^k$ — центры кубов, η_k — длины их сторон, а m_k — числа в равенстве (6). Легко видеть, что если уже имеется приближение

$$\left(\int\limits_{\Omega} |f(\mathbf{x}) - \varphi_1(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x} \right)^{1/p} = \varepsilon_1 < \varepsilon$$

функции f при помощи некоторой функции φ_1 из указанного семейства, то всегда можно в последнем взять другую функцию φ, определяемую рациональными параметрами, так мало отличающимися от прежних, что

$$\left(\int\limits_{\Omega} |\varphi_1(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x} \right)^{1/p} < \varepsilon - \varepsilon_1.$$

Но тогда для любой функции $f \in L'_p(\Omega)$ и для любого $\varepsilon > 0$ можно указать кусочно постоянную функцию φ, определяемую рациональными параметрами и приближающую f в метрике $L'_p(\Omega)$ с точностью до ε:

$$\left(\int_\Omega |f(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x}\right)^{1/p} < \varepsilon.$$

Но все такие функции φ (определяемые рациональными параметрами) можно перенумеровать — их счетное множество.

Мы доказали принципиально важную теорему:

Теорема 5. *В пространстве* $L'_p(\Omega)$ $(L_p(\Omega))$ *существует счетная последовательность (кусочно постоянных) функций* $\varphi_1(\mathbf{x}), \varphi_2(\mathbf{x}), \varphi_3(\mathbf{x}), \ldots$ *таких, что какова бы ни была функция* $f(\mathbf{x}) \in L'_p(\Omega)$ *и каково бы ни было* $\varepsilon > 0$, *найдется такой элемент* $\varphi_k(\mathbf{x})$ *этой последовательности, что*

$$\left(\int_\Omega |f - \varphi_k|^p d\mathbf{x}\right)^{1/p} < \varepsilon. \tag{7}$$

Факт, который описывается в теореме 5, вполне аналогичен следующему факту: *во множестве всех действительных (комплексных) чисел можно указать принадлежащее к нему всюду плотное* (см. § 14.5) *в нем счетное множество рациональных действительных (соответственно комплексных с рациональными компонентами) чисел.*

Теорема 6. *Пусть задана функция* $f \in L'_p(\Omega)$ $(L_p(\Omega))$. *Если* Ω — *часть* $R_n = R$, *то будем считать, что* f *продолжена на* R, *полагая* $f = 0$ *вне* Ω. *Тогда* $(1 \leqslant p < \infty)$

$$\psi(\mathbf{t}) = \left(\int_R |f(\mathbf{x} + \mathbf{t}) - f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x}\right)^{1/p} \to 0, \quad \mathbf{t} \to 0. \tag{8}$$

Доказательство. Функция f, продолжающая, как указано в теореме, функцию $f \in L'_p(\Omega)$ $(L_p(\Omega))$, принадлежит, очевидно, к $L'_p = L'_p(R)$ $(L_p = L_p(R))$, и потому к ней применима теорема 1. Зададим $\varepsilon > 0$ и подберем непрерывную финитную в R_n функцию φ такую, что

$$\left(\int_R |f(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x}\right)^{1/p} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Носитель φ — ограниченное множество $F \subset g' \subset g$, где g' и g — некоторые концентрические шары радиусов $\rho' < \rho$. Функция φ непрерывна на замкнутом ограниченном шаре g и потому равномерно непрерывна на нем. Обозначим через $(x', x'' \in g)$

$$\omega(\delta) = \sup_{|x' - x''| < \delta} |\varphi(\mathbf{x}') - \varphi(\mathbf{x}'')|$$

модуль непрерывности φ на g.

Тогда получим ($|g'|$ — мера g')

$$\left(\int_R |f(\mathbf{x}+\mathbf{t})-f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x}\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_R |f(\mathbf{x}+\mathbf{t})-\varphi(\mathbf{x}+\mathbf{t})|^p d\mathbf{x}\right)^{1/p} +$$

$$+\left(\int_g |\varphi(\mathbf{x}+\mathbf{t})-\varphi(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x}\right)^{1/p} + \left(\int_R |\varphi(\mathbf{x}-f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x}\right)^{1/p} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \omega(\delta)|g'|^{1/p} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon \quad (|\mathbf{t}| < \delta < \rho - \rho'),$$

если только δ достаточно мало.

§ 14.5. Сведения из теории линейных множеств и линейных нормированных пространств

Пусть E — линейное множество (комплексное или действительное, см. § 6.1). Всякое множество E_1, принадлежащее E и содержащее вместе с элементом $\mathbf{x}$ элемент $\alpha\mathbf{x}$, где α — произвольное число (соответственно комплексное, действительное), и вместе с элементами $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ их сумму $\mathbf{x}+\mathbf{y}$, очевидно, есть в свою очередь линейное множество.

Конечная система элементов $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in E$ называется *линейно независимой*, если из равенства

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = \theta$$

следует, что $\alpha_j = 0$ ($j = 1, \ldots, n$). В противном случае эта система называется *линейно зависимой*.

Линейное множество E' называется *конечномерным* и при том *n-мерным*, если в нем имеется система из n линейно независимых элементов $x_1, \ldots, x_n$, а всякая система из $n+1$ элементов линейно зависима. Легко видеть, что в этом случае любой элемент $\mathbf{x} \in E'$ единственным образом выражается в виде суммы

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbf{x}_k, \tag{1}$$

где α_k ($k = 1, \ldots, n$) — некоторые числа (комплексные, действительные).

Можно показать, что и, наоборот, *если система элементов $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ линейно независима, то линейное множество E' элементов вида* (1) n-мерно. Для этого достаточно установить, что *всякие $n+1$ элементов E' образуют линейно зависимую систему.*

Система функций

$$1, x, x^2, \ldots, x^{n-1} \quad (a \leqslant x \leqslant b) \tag{2}$$

линейно независима в пространстве $C(a, b)$, потому что нулевым элементом в $C(a, b)$ является функция, тождественно равная