Тогда получим ($|g'|$ — мера g')

$$\left(\int_R |f(\mathbf{x}+\mathbf{t})-f(\mathbf{x})|^p\,d\mathbf{x}\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_R |f(\mathbf{x}+\mathbf{t})-\varphi(\mathbf{x}+\mathbf{t})|^p\,d\mathbf{x}\right)^{1/p} +$$

$$+\left(\int_g |\varphi(\mathbf{x}+\mathbf{t})-\varphi(\mathbf{x})|^p\,d\mathbf{x}\right)^{1/p} + \left(\int_R |\varphi(\mathbf{x}-f(\mathbf{x})|^p\,d\mathbf{x}\right)^{1/p} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3}+\omega(\delta)\,|g'|^{1/p}+\frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon \quad (|\mathbf{t}|<\delta<\rho-\rho'),$$

если только δ достаточно мало.

§ 14.5. Сведения из теории линейных множеств и линейных нормированных пространств

Пусть E — линейное множество (комплексное или действительное, см. § 6.1). Всякое множество E_1, принадлежащее E и содержащее вместе с элементом $\mathbf{x}$ элемент $\alpha\mathbf{x}$, где α — произвольное число (соответственно комплексное, действительное), и вместе с элементами $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ их сумму $\mathbf{x}+\mathbf{y}$, очевидно, есть в свою очередь линейное множество.

Конечная система элементов $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in E$ называется *линейно независимой*, если из равенства

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = \theta$$

следует, что $\alpha_j = 0$ $(j = 1, \ldots, n)$. В противном случае эта система называется *линейно зависимой*.

Линейное множество E' называется *конечномерным* и при том *n-мерным*, если в нем имеется система из n линейно независимых элементов $x_1, \ldots, x_n$, а всякая система из $n+1$ элементов линейно зависима. Легко видеть, что в этом случае любой элемент $\mathbf{x} \in E'$ единственным образом выражается в виде суммы

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbf{x}_k, \tag{1}$$

где α_k $(k = 1, \ldots, n)$ — некоторые числа (комплексные, действительные).

Можно показать, что и, наоборот, *если система элементов* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ *линейно независима, то линейное множество* E' *элементов вида* (1) n-мерно. Для этого достаточно установить, что *всякие* $n+1$ *элементов* E' *образуют линейно зависимую систему.*

Система функций

$$1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^{n-1} \quad (a \leqslant x \leqslant b) \tag{2}$$

линейно независима в пространстве $C(a, b)$, потому что нулевым элементом в $C(a, b)$ является функция, тождественно равная нулю на $[a, b]$, а из равенства

$$\sum_{0}^{n-1} \alpha_k x^k \equiv 0 \quad (a \leqslant x \leqslant b) \tag{3}$$

следует, что $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0$.

В пространствах $L'_p(a, b)$ система (2) также линейно независима, потому что для того, чтобы сумма $\sum\limits_{0}^{n-1} \alpha_k x^k$ была нулевым элементом, необходимо и достаточно выполнение равенства

$$\int_a^b \left| \sum_{0}^{n-1} \alpha_k x^k \right|^p dx = 0,$$

из которого, вследствие непрерывности (см. теорему 1, § 14.2) подынтегральной функции, следует (3) и потому равенство нулю всех α_j $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Поэтому совокупность всех многочленов $P_{n-1}(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ данной степени*) $n-1$ есть линейное n-мерное множество в $C(a, b)$ и $L'_p(a, b)$.

Линейное множество E называется *бесконечномерным*, если в нем можно найти линейно независимую систему $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ элементов, как бы ни было велико n. Последовательность элементов

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \ldots \tag{4}$$

называется *линейно независимой*, если любая ее подсистема, состоящая из конечного числа элементов, линейно независима. Такую (бесконечную) последовательность мы будем называть еще *счетной линейно независимой системой элементов*.

В бесконечномерном линейном множестве E существуют счетные линейно независимые системы элементов. В самом деле, любой элемент $x_1 \neq \theta$ образует линейно независимую систему, состоящую из одного элемента. Его будем считать первым элементом последовательности (4), которую мы построим по индукции. Допустим, что в E уже обнаружена линейно независимая система

$$\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n. \tag{5}$$

Вследствие бесконечномерности E существует в E элемент $\mathbf{x}_{n+1}$, образующий вместе с элементами (5) линейно независимую систему, так как в противном случае любой элемент $\mathbf{x} \in E$ мог бы быть представлен в виде $\mathbf{x} = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbf{x}_k$, где α_k — числа, и множество элементов вида $\sum\limits_{1}^{n} \alpha_k \mathbf{x}_k$ содержало бы только n линейно независимых элементов.

*) Точнее, степени не выше $n-1$.

Продолжая этот процесс неограниченно, получим последовательность (4), очевидно, линейно независимую. Надо учесть, что если выхватить из последовательности (4) любые n элементов $\mathbf{x}_{k_1}, \ldots, \mathbf{x}_{k_n}$ $(k_1 < k_2 < \ldots < k_n)$, то они образуют линейно независимую систему; это следует из независимости более широкой системы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{k_n}$.

Последовательность функций $1, x, x^2, \ldots$ может служить примером счетной линейно независимой системы в $C(a, b)$ и $L'_p(a, b)$.

Пусть теперь E есть линейное нормированное пространство. Множество $G \subset E$ называется *плотным* в E, если для любого элемента $\mathbf{x} \in E$ и любого положительного $\varepsilon > 0$ найдется в G элемент $\mathbf{y}$, для которого

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \varepsilon.$$

В силу этого определения на основании теоремы 1 § 14.4 множество непрерывных (даже бесконечно дифференцируемых) финитных в Ω функций плотно в $L'_p(\Omega)$ (и в $L_p(\Omega)$), также как плотно в этих пространствах множество кусочно постоянных функций, имеющих носитель в Ω.

Вот еще пример. Функцию φ, заданную на отрезке $[a, b]$, называется *полигональной*, если она непрерывна на этом отрезке $(\varphi \in C(a, b))$ и существует такое разбиение последнего, что на каждом его частичном отрезке φ — линейная функция. Для любой функции $f \in C(a, b)$ в силу ее равномерной непрерывности для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такую полигональную функцию $\varphi(x)$, что

$$\|f - \varphi\|_{C(a,b)} = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon.$$

Следовательно, полигональные функции, определенные на $[a, b]$, образуют плотное в $C(a, b)$ множество.

Пространство E называется *сепарабельным* или *счетномерным*, если оно бесконечномерно и существует счетное плотное в нем множество. Пространство $C(a, b)$ сепарабельно (см. ниже упражнения).

В силу теоремы 5 § 14.4 (бесконечномерные) *пространства* $L'_p(\Omega)$ $(L_{p'}(\Omega))$ *сепарабельны*, потому что они содержат в себе счетное плотное в них множество кусочно постоянных функций (см. ниже упражнение 5).

Множество $M \subset E$ называется *полным* в E, если совокупность всевозможных линейных комбинаций вида $\sum_1^n \alpha_k \mathbf{x}_k$, где α_k — числа, а $\mathbf{x}_k$ — элементы M, образуют множество, плотное в E.

Теорема 1. *Если в E имеется счетная полная в E линейно независимая система элементов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \ldots$, то E сепарабельно.*

В самом деле, E бесконечномерно, потому что в E имеется линейно независимая система элементов $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$, состоящая из n элементов, каково бы ни было натуральное n.

Далее, множество M' сумм $\sum\limits_1^n r_k \mathbf{x}_k$, где n — произвольное натуральное число, а r_k ($k = 1, \ldots, n$) — произвольные рациональные числа, счетно (эти суммы можно перенумеровать). С другой стороны, для любого элемента $\mathbf{x} \in E$ и всякого $\varepsilon > 0$ в силу плотности M в E можно указать такую сумму $\sum\limits_1^n \alpha_k x_k$, что

$$\left\| \mathbf{x} - \sum_1^n \alpha_k x_k \right\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

а теперь можно взять рациональные числа r_k, настолько близкие к соответствующим α_k, что

$$\left\| \sum_1^n \alpha_k \mathbf{x}_k - \sum_1^n r_k \mathbf{x}_k \right\| \leqslant \sum_1^n |\alpha_k - r_k| \, \|\mathbf{x}_k\| \leqslant K \sum_1^n |\alpha_k - r_k| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$K = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \|\mathbf{x}_k\|.$$

Поэтому

$$\left\| \mathbf{x} - \sum_1^n r_k \mathbf{x}_k \right\| \leqslant \left\| \mathbf{x} - \sum_1^n \alpha_k \mathbf{x}_k \right\| + \left\| \sum_1^n \alpha_k \mathbf{x}_k - \sum_1^n r_k \mathbf{x}_k \right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

и нам удалось любой элемент $\mathbf{x} \in E$ приблизить (аппроксимировать) некоторым элементом из счетного множества M' с любой наперед заданной точностью. Это доказывает сепарабельность E.

Верна также обратная

Теорема 2. *Если пространство E сепарабельно, то в нем имеется счетная линейно независимая система элементов, полная в E.*

В самом деле, если E сепарабельно, то имеется счетная последовательность, плотная в нем. Тем более можно считать, что эта последовательность полная в E.

Но из полной счетной системы элементов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$ всегда можно выделить (вообще говоря, не единственную) линейно независимую последовательность элементов, образующих в свою очередь полную систему.

Например, подпоследовательность

$$\mathbf{x}_{n_1}, \mathbf{x}_{n_2}, \mathbf{x}_{n_3}, \ldots \tag{6}$$

удовлетворяет этому свойству, если индексы $n_1, n_2, \ldots$ определить следующим образом. Пусть n_1 есть наименьший индекс n, для которого $\mathbf{x}_n \neq \theta$. Элемент $\mathbf{x}_{n_1}$ образует линейно независимую систему, состоящую из одного элемента. Далее, если индексы $n_1, \ldots, n_k$ определены, то n_{k+1} определяется как наименьшее натуральное n, для которого элементы $\mathbf{x}_{n_1}, \ldots, \mathbf{x}_{n_k}, \mathbf{x}_{n_{k+1}}$ образуют линейно независимую систему. Важно, что при каждом k существует такое n_{k+1}, т. е. конструируемая линейно независимая система (6) бесконечна (счетна).

В самом деле, пусть при некотором k не существует n_{k+1}. Положим $\mathbf{z}_1 = \mathbf{x}_{n_1}, \ldots, \mathbf{z}_k = \mathbf{x}_{n_k}$. Тогда система

$$\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_k, \tag{7}$$

где k фиксировано, будет обладать свойствами:

1) система (7) линейно независима;

2) для любого элемента $\mathbf{x} \in E$ и любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, что

$$\left\| \mathbf{x} - \sum_1^k \alpha_j \mathbf{z}_j \right\| < \varepsilon. \tag{8}$$

Справедлива

Лемма 1. *Из свойств* 1) *и* 2) *следует, что каждому элементу* $\mathbf{x} \in E$ *соответствует система чисел* $\beta_1, \ldots, \beta_k$ *(единственная), для которой*

$$\mathbf{x} = \sum_1^k \beta_j \mathbf{z}_j.$$

Но тогда E есть n-мерное пространство, и мы пришли в противоречие с предположением, что E счетномерно.

Лемма 1 особенно просто доказывается в случае, если E есть линейное пространство со скалярным произведением (см. теорему 3, § 14.7). В дальнейшем нам понадобится именно этот случай.

Доказательство леммы 1 базируется на следующей самой по себе интересной лемме.

Лемма 2. *Если система элементов* $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$, принадлежащих E, *линейно независима, то существует положительное число* $\lambda > 0$ *такое, что*

$$\lambda \sum_1^n |\alpha_j| \leqslant \left\| \sum \alpha_j \mathbf{y}_j \right\| \tag{9}$$

для любой системы чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (λ вообще зависит от n).

Доказательство. Введем функцию

$$\Phi(\alpha) = \Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \left\| \sum_1^n \alpha_j \mathbf{y}_j \right\|$$

от n переменных, определенную на всем n-мерном пространстве R_n. Она непрерывна:

$$|\Phi(\alpha) - \Phi(\alpha^0)| = \left| \left\| \sum_1^n \alpha_j \mathbf{y}_j \right\| - \left\| \sum_j^n \alpha_j^0 \mathbf{y}_j \right\| \right| \leqslant \left\| \sum_1^n \alpha_j y_j - \sum_1^n \alpha_j^0 \mathbf{y}_j \right\| =$$

$$= \left\| \sum_1^n (\alpha_j - \alpha_j^0) \mathbf{y}_j \right\| \leqslant \sum_{j=1}^n |\alpha_j - \alpha_j^0| \, \|\mathbf{y}_j\| \leqslant K \sum_{j=1}^n |\alpha_j - \alpha_j^0| \to 0, \quad \alpha \to \alpha^0,$$

где

$$K = K_n = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \| y_j \|.$$

Кроме того, функция Φ в силу линейной независимости системы элементов $y_1, \ldots, y_n$ положительна, каковы бы ни были числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, за исключением того случая, когда $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. Введем еще в R_n множество Λ точек $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, координаты которых удовлетворяют равенству

$$\| \alpha \|^* = \sum_1^n | \alpha_j | = 1.$$

Λ ограничено, так как координаты его точек удовлетворяют неравенству

$$| \alpha_s | \leqslant \sum_{j=1}^n | \alpha_j | = 1.$$

Кроме того, оно замкнуто (см. пример 5, § 7.9). Поэтому функция $\Phi(\alpha)$ достигает на множестве Λ в некоторой его точке α^0 своего минимума:

$$\lambda = \Phi(\alpha^0) = \min_{\alpha \in \Lambda} \Phi(\alpha).$$

При этом $\lambda > 0$, потому что точки $\alpha \in \Lambda$ заведомо не нулевые. Итак, имеет место неравенство

$$0 < \lambda \leqslant \left\| \sum_1^n \alpha_j y_j \right\|, \tag{10}$$

какова бы ни была точка $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \Lambda$. Мы, таким образом, доказали неравенство (9) в частном случае, когда $\alpha \in \Lambda$.

Докажем теперь, что оно верно для любой точки $\alpha \in R_n$. В самом деле, если $\alpha = \theta(0, \ldots, 0)$, то (9) тривиально. Пусть $\alpha \neq \theta$. Введем новую точку

$$\beta = \frac{\alpha}{\| \alpha \|^*} = \left(\frac{\alpha_1}{\| \alpha \|^*}, \ldots, \frac{\alpha_n}{\| \alpha \|^*} \right).$$

Очевидно, $\beta \in \Lambda$, так как

$$\sum_{j=1}^n | \beta_j | = \sum_{j=1}^n \left| \frac{\alpha_j}{\| \alpha \|^*} \right| = 1,$$

и потому в силу (10)

$$\lambda \leqslant \left\| \sum_1^n \frac{\alpha_j}{\| \alpha \|^*} x_j \right\| = \frac{1}{\| \alpha \|^*} \left\| \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \right\|,$$

откуда следует (9).

Лемма 1 вытекает из следующих рассуждений. Пусть $x \in E$. Если допустить, что элементы

$$x, z_1, \ldots, z_n \tag{11}$$

образуют линейно независимую систему, то на основании леммы 2 для любых чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$

$$1 \leqslant 1 + \sum_1^n |\alpha_j| \leqslant \frac{1}{\lambda} \left\| \mathbf{x} - \sum_1^n \alpha_j z_j \right\| \quad (\lambda > 0)$$

и

$$0 < \lambda \leqslant \left\| \mathbf{x} - \sum_1^n \alpha_j z_j \right\|.$$

Но это противоречит условию леммы 1, в силу которого при $\varepsilon < \lambda$ можно указать систему чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, для которой выполняется неравенство (8). Поэтому система (11) линейно зависима и существуют числа $c, c_1, \ldots, c_n$, одновременно не равные нулю, для которых

$$c\mathbf{x} + c_1\mathbf{z}_1 + \ldots + c_n\mathbf{z}_n = \theta.$$

В таком случае $c \neq 0$, так как иначе система $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n$ была бы линейно зависимой; поэтому

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \beta_j z_j \quad \left(\beta_j = -\frac{c_j}{c}\right),$$

и лемма 1 доказана.

Заметим, что имеет место в известном смысле обратное (9) неравенство,

$$\left\| \sum_1^p \alpha_j \mathbf{y}_j \right\| \leqslant K \sum_{j=1}^n |\alpha_j|, \tag{12}$$

$$K = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \|\mathbf{y}_j\|,$$

где, таким образом, K не зависит от $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Объединяя неравенства (9) и (12), получим (для линейно независимой системы $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$) два неравенства

$$C_1 \sum_1^n |\alpha_j| \leqslant \left\| \sum_1^n \alpha_j \mathbf{y}_j \right\| \leqslant C_2 \sum_{j=1}^n |\alpha_j|, \tag{13}$$

где константы C_1 и C_2 ($C_1 = \lambda$, $C_2 = K$) не зависят от $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Однако надо иметь в виду, что константы C_1 и C_2 зависят от нормы, которая введена в пространстве E.

Упражнения.

Доказать следующие утверждения:

1. Множество всех определенных на $[a, b]$ полигональных функций Π', графики которых имеют угловые точки с рациональными координатами, счетно.

2. Каковы бы ни были непрерывная на $[a, b]$ функция $f(x)$ и $\varepsilon > 0$, найдется функция $\varphi \in \Pi'$ такая, что

$$|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon.$$

Это свойство говорит, что Π' плотно в $C(a, b)$. Если еще учесть, что в

$C(a, b)$ имеется счетная линейно независимая система функций $1, x, x^2, \ldots$, то $C(a, b)$ сепарабельно.

3. Π' плотно в $L'_p(a, b)$ $(L_p(a, b))$.

Воспользоваться тем, что непрерывные финитные в (a, b) функции образуют множество, плотное в этих пространствах, а также результатом предыдущего примера 2.

4. Пространства $C(\overline{\Omega})$, $L'_p(\Omega)$ $(L_p(\Omega))$ (Ω — открытое множество) бесконечномерны. Рассмотреть последовательность принадлежащих к Ω попарно непересекающихся кубов $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \ldots$ и их характеристических функций (в случае $C(\overline{\Omega})$ — функций вида § 14.4, (5), при этом Ω ограничено)

$$\varphi_{\Delta_k}(x) = \begin{cases} 1 & \text{на } \Delta_k, \\ 0 & \text{на } \Delta_k \end{cases} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

§ 14.6. Ортогональная система в пространстве со скалярным произведением

Пусть H есть линейное (комплексное или действительное) множество элементов $\varphi, \psi, f, \ldots$, где введено скалярное произведение (φ, ψ) $(\varphi, \psi \in H)$, подчиняющееся, таким образом, свойствам 1)—3) скалярного произведения (см. § 6.2).

Сначала наши рассуждения будут относиться к произвольному не обязательно полному пространству со скалярным произведением, каким является, как мы знаем, пространство $L'_2(\Omega)$.

Элемент $\varphi \in H$ называется *нормальным*, если $\|\varphi\| = (\varphi, \varphi)^{1/2} = 1$.

Два элемента $\varphi, \psi \in H$ называются *ортогональными* (друг к другу), если $(\varphi, \psi) = 0$.

Система элементов

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \tag{1}$$

(конечная или бесконечная) называется *ортогональной*, если ее элементы — не нулевые (имеют положительную норму) и попарно ортогональны.

Наконец, система (1) называется *ортогональной* и *нормальной* или *ортонормированной*, если

$$(\varphi_k, \varphi_l) = \delta_{kl} = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ 1, & k = l, \end{cases}$$

т. е. она ортогональна и каждый ее элемент имеет единичную норму.

Всякая конечная ортогональная система $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$ линейно независима в H, т. е. из того, что

$$\sum_1^n \alpha_k \varphi_k = \theta,$$

где α_k — числа, следует, что все $\alpha_k = 0$. В самом деле, если помножить обе части этого равенства скалярно на φ_l $(l = 1, \ldots, N)$,