$C(a, b)$ имеется счетная линейно независимая система функций $1, x, x^2, \ldots$, то $C(a, b)$ сепарабельно.

3. Π' плотно в $L'_p(a, b)$ $(L_p(a, b))$.

Воспользоваться тем, что непрерывные финитные в (a, b) функции образуют множество, плотное в этих пространствах, а также результатом предыдущего примера 2.

4. Пространства $C(\overline{\Omega})$, $L'_p(\Omega)$ $(L_p(\Omega))$ (Ω — открытое множество) бесконечномерны. Рассмотреть последовательность принадлежащих к Ω попарно непересекающихся кубов $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \ldots$ и их характеристических функций (в случае $C(\overline{\Omega})$ — функций вида § 14.4, (5), при этом Ω ограничено)

$$\varphi_{\Delta_k}(x) = \begin{cases} 1 & \text{на } \Delta_k, \\ 0 & \text{на } \Delta_k \end{cases} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

§ 14.6. Ортогональная система в пространстве со скалярным произведением

Пусть H есть линейное (комплексное или действительное) множество элементов $\varphi, \psi, f, \ldots$, где введено скалярное произведение (φ, ψ) $(\varphi, \psi \in H)$, подчиняющееся, таким образом, свойствам 1)—3) скалярного произведения (см. § 6.2).

Сначала наши рассуждения будут относиться к произвольному не обязательно полному пространству со скалярным произведением, каким является, как мы знаем, пространство $L'_2(\Omega)$.

Элемент $\varphi \in H$ называется *нормальным*, если $\|\varphi\| = (\varphi, \varphi)^{1/2} = 1$.

Два элемента $\varphi, \psi \in H$ называются *ортогональными* (друг к другу), если $(\varphi, \psi) = 0$.

Система элементов

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \tag{1}$$

(конечная или бесконечная) называется *ортогональной*, если ее элементы — не нулевые (имеют положительную норму) и попарно ортогональны.

Наконец, система (1) называется *ортогональной* и *нормальной* или *ортонормированной*, если

$$(\varphi_k, \varphi_l) = \delta_{kl} = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ 1, & k = l, \end{cases}$$

т. е. она ортогональна и каждый ее элемент имеет единичную норму.

Всякая конечная ортогональная система $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$ линейно независима в H, т. е. из того, что

$$\sum_1^n \alpha_k \varphi_k = \theta,$$

где α_k — числа, следует, что все $\alpha_k = 0$. В самом деле, если помножить обе части этого равенства скалярно на φ_l $(l = 1, \ldots, N)$, то на основании линейных свойств скалярного произведения получим

$$\left(\sum_{1}^{N} \alpha_k \varphi_k, \varphi_l\right) = \alpha_l (\varphi_l, \varphi_l) = 0,$$

и так как $(\varphi_l, \varphi_l) > 0$, то $\alpha_l = 0$ $(l = 1, \ldots, n)$.

Если $f \in H$ — произвольный элемент, то число

$$\frac{1}{\|\varphi_k\|^2}(f, \varphi_k) \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

называется *коэффициентом Фурье* f относительно элемента φ_k ортогональной системы (1).

Ряд

$$f \sim \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\|\varphi_k\|^2}(f, \varphi_k)\, \varphi_k \tag{2}$$

(порождаемый элементом $f \in H$) называется *рядом Фурье элемента f по ортогональной системе* (1) (в честь французского математика Ж. Б. Фурье (1768—1830), которому принадлежат первые фундаментальные исследования, относящиеся к представлению функций тригонометрическими рядами).

Если система (1) ортонормирована, то $\|\varphi_k\| = 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и ряд Фурье $f \in H$ записывается еще проще:

$$f \sim \sum_{1}^{\infty} (f, \varphi_k)\, \varphi_k. \tag{3}$$

Коэффициентами Фурье в этом случае являются числа (f, φ_k). В дальнейшем мы будем рассматривать только ортонормированные системы (1). Переход от них к произвольным ортогональным системам носит технический характер.

Отметим уже сейчас, что тригонометрические функции

$$\frac{1}{2}, \ \cos x, \ \sin x, \ \cos 2x, \ \sin 2x, \ \ldots$$

образуют ортогональную систему в пространстве $L'_2(0, 2\pi)$ (или $L_2(0, 2\pi)$) функций с интегрируемым квадратом модуля на $[0, 2\pi]$. Ряды Фурье по этой конкретной системе будут специально изучаться нами в гл. 15. Пространство $L'_2(0, 2\pi)$ $(L_2(0, 2\pi))$ есть частный случай линейного пространства H со скалярным произведением, и все результаты, которые мы получим в этой главе для H, соответственно переносятся на $L'_2(0, \pi)$ $(L_2(0, 2\pi))$.

Итак, пусть задана ортонормированная система элементов (1) в H. Зададим еще элемент $f \in H$ и поставим задачу: требуется среди всевозможных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ (комплексных или действительных соответственно в комплексном или действительном пространстве H) найти такие, для которых норма

$$\left\| f - \sum_1^N \alpha_k \varphi_k \right\| \tag{4}$$

обращается в минимум.

Имеем

$$\left\| f - \sum_1^N \alpha_k \varphi_k \right\|^2 = \left(f - \sum_{k=1}^N \alpha_k \varphi_k,\ f - \sum_{l=1}^N \alpha_l \varphi_l \right) =$$

$$= (f, f) - \sum_1^N \left[\overline{\alpha}_l (f, \varphi_l) + \alpha_l \left(\overline{f, \varphi_l}\right) \right] + \sum_1^N |\alpha_l|^2 =$$

$$= (f, f) + \sum_1^N |\alpha_l - (f, \varphi_l)|^2 - \sum_1^N |f, \varphi_l|^2 \geqslant (f, f) - \sum_1^N |(f, \varphi_l|)^2. \tag{5}$$

При этом оценка справа достигается, очевидно, для чисел

$$\alpha_l = (f, \varphi_l) \qquad (l = 1, 2, \ldots, N)$$

и только для них. Эти числа (f, φ_l) мы назвали коэффициентами Фурье элемента f относительно элементов φ_l ортонормированной системы.

Полученный результат можно записать в виде цепи равенств:

$$E_N(f)_H = \min_{\alpha_k} \left\| f - \sum_1^N \alpha_k \varphi_k \right\| = \left\| f - \sum_1^N (f, \varphi_k) \varphi_k \right\| =$$

$$= \left((f, f) - \sum_{k=1}^N |(f, \varphi_k)|^2 \right)^{1/2} \tag{6}$$

Первый член этой цепи $E_N(f)_H$ есть обозначение минимума по α_k, записанного во втором члене. Его называют *наилучшим приближением элемента* $f \in H$ *(в метрике* H*) при помощи линейных комбинаций вида* $\sum_1^N \alpha_k \varphi_k$, *где* α_k — *произвольные числа* (комплексные, соответственно действительные). Третий член цепи выражает, что наилучшее приближение достигается, когда числа α_k являются коэффициентами Фурье f относительно φ_k, т. е. при $\alpha_k = (f, \varphi_k)$. Наконец, последний, четвертый член дает явное выражение для наилучшего приближения f через (f, f) и коэффициенты Фурье (f, φ_k) $(k = 1, \ldots, N)$.

Ясно, что $E_N(f)_H \geqslant 0$, так как это число есть минимум неотрицательной нормы. Ясно также, что $E_N(f)_H$ не возрастает при возрастании N. Это видно из последнего члена формулы (6), но это видно и из второго члена:

$$E_N(f)_H = \min_{\alpha_k} \left\| f - \sum_1^N \alpha_k \varphi_k \right\| \geqslant \min_{\alpha_k} \left\| f - \sum_1^{N+1} \alpha_k \varphi_k \right\| = E_{N+1}(f)_H,$$

потому что сумма $\sum_{1}^{N}$ есть частный случай суммы $\sum_{1}^{N+1}$ при $\alpha_{N+1}=0$.

Из сказанного следует, что для любого элемента $f \in H$ существует предел

$$\lambda = \lim_{N\to\infty} E_N(f)_H =$$
$$= \sqrt{(f, f) - \sum_{1}^{\infty} |(f, \varphi_k)|^2} = \lim_{N\to\infty} \left\| f - \sum_{k=1}^{N} (f, \varphi_k)\varphi_k \right\| \geqslant 0. \qquad (7)$$

В частности, отсюда следует, что *ряд, состоящий из квадратов модулей коэффициентов элемента $f \in H$, сходится и выполняется неравенство*

$$\sum_{1}^{\infty} |(f, \varphi_k)|^2 \leqslant (f, f), \qquad (8)$$

называемое неравенством Парсеваля для элемента f.

Термин неравенство здесь употребляется в том смысле, что утверждается, что левая часть (8) не превышает правую. На самом деле может оказаться, что для тех или иных элементов f, а может быть и для всех соотношение (8) есть точное равенство. Тогда оно называется *равенством Парсеваля* *).

Условимся говорить, что ряд

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$$

элементов $u_k \in H$ *сходится* в метрике H к элементу $f \in H$, если для его n-й суммы $s_n (\in H)$

$$s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \| f - s_n \| = 0.$$

При этом пишут

$$f = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots = \sum_{0}^{\infty} u_k \qquad (9)$$

и говорят, что f есть *сумма ряда, сходящегося к f в метрике H.*

Допустим, что в равенствах (7) для данного элемента f случилось, что $\lambda = 0$. Разберемся, что тогда выражает равенство нулю остальных трех членов (7).

1) Равенство нулю второго члена (7) может быть эквивалентно выражено на следующем языке: для любого $\varepsilon > 0$ можно

*) М. Парсеваль — французский математик, получивший это неравенство в 1805 г. для тригонометрических систем.

указать такое N_0 и числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_{N_0}$, что

$$\left\| f - \sum_{1}^{N_0} \alpha_k \varphi_k \right\| < \varepsilon. \qquad (10)$$

В самом деле, если указанные числа N_0, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{N_0}$ найдены, то зафиксируем N_0 и возьмем минимум левой части по α_k. Тогда получим

$$\varepsilon > E_{N_0}(f)_H \geqslant E_N(f)_H \quad (N > N_0),$$

т. е. $E_N(f) \to 0$ $(N \to \infty)$. Наоборот, из этого последнего свойства следует, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать N такое, что

$$\varepsilon > E_N(f)_H = \left\| f - \sum_{1}^{N} \alpha_k \varphi_k \right\| \quad (\alpha_k = (f, \varphi_k)).$$

2) Равенство нулю третьего члена (7) выражает, что для рассматриваемого элемента f имеет место точное равенство Парсеваля.

3) Равенство же нулю четвертого члена (7) выражает, что ряд Фурье f по системе (6) сходится к f в смысле метрики, определенной в H.

Так как свойства 1), 2), 3) *могут иметь место только одновременно, то выполнение одного из них для какого-нибудь элемента влечет за собой выполнение двух остальных.*

Напомним, что свойство 1), если оно выполняется для всех элементов $f \in H$, выражает (см. § 14.5), что система элементов φ_1, φ_2, φ_3, ... полна в H.

Из сказанного как следствие вытекает следующая важная

Теорема 1. *Для того чтобы ортонормированная система элементов* $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ *была полной в* H, *необходимо и достаточно выполнение одного из следующих условий:*

а) *Ряд Фурье произвольного элемента* $f \in H$

$$f \sim \sum_{1}^{\infty} (f, \varphi_k) \varphi_k$$

сходится к f *в метрике* H (и в этом соотношении можно заменить $\sim$ на $=$, см. (9)).

б) *Для каждого элемента* $f \in H$ *имеет место равенство Парсеваля:*

$$(f, f) = \sum_{1}^{\infty} |(f, \varphi_k)|^2.$$

Отметим лемму:

Лемма 1. *Пусть имеет место равенство*

$$f = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots,$$

где f, $u_k \in H$ и ряд сходится в метрике H(к f). Тогда для любого элемента $v \in H$

$$(f, v) = (u_0, v) + (u_1, v) + (u_2, v) + \ldots,$$

где, таким образом, числовой ряд справа сходится к (f, v).

В самом деле,

$$\left|(f, v) - \sum_0^N (u_k, v)\right| = \left|\left(f - \sum_0^N u_k, v\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left\| f - \sum_0^N u_k \right\| \|v\| \to 0 \qquad (N \to \infty).$$

Следствие. *Если ряд*

$$f = \sum_1^\infty \alpha_k \varphi_k, \tag{11}$$

где α_k — числа, а $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ — ортонормированная система, сходится в метрике H к некоторому элементу $f \in H$, то числа α_s — необходимо коэффициенты Фурье f:

$$\alpha_s = (f, \varphi_s) \qquad (s = 1, 2, \ldots), \tag{12}$$

т. е. разложение f в указанный ряд единственно.

Действительно, если умножить скалярно члены обеих частей равенства (11) на φ_s, то на основании леммы 1 получим (12).

Теорема 2. *Если ортогональная и нормальная система* (1) *полна в H, то для любых двух элементов f, $\varphi \in H$ имеет место числовое равенство*

$$(f, \varphi) = \sum_{k=1}^\infty (f, \varphi_k) \overline{(\varphi, \varphi_k)} \tag{13}$$

где, таким образом, ряд справа сходится к числу (f, φ).

В самом деле, из полноты системы (1) на основании теоремы 1 следует, что ряд

$$f = \sum_1^\infty (f, \varphi_k) \varphi_k \tag{14}$$

сходится к f в метрике H. Теперь (13) получается из (14), если скалярно умножить все члены левой и правой частей (14) на φ:

$$(f, \varphi) = \sum_1^\infty (f, \varphi_k)(\varphi_k, \varphi) = \sum_1^\infty (f, \varphi_k) \overline{(\varphi, \varphi_k)},$$

что законно в силу леммы 1.

Равенство (13) содержит в себе, в частности, при $f = \varphi \in H$ равенство Парсеваля.

Введем еще определение. Ортонормированная система (1) *замкнута*, если из того, что для элемента $\psi \in H$ выполняются равенства

$$(\psi, \varphi_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{15}$$

следует, что ψ есть нулевой элемент $H (\psi = \theta)$.

Из равенства Парсеваля для полной системы вытекает

Теорема 3. *Из полноты ортонормированной системы следует ее замкнутость.*

Все утверждения, доказанные в этом параграфе выше, верны как для полного, так и не полного*) пространства H. В частности, они верны для пространства $L_2'(\Omega)$, которое, как мы знаем, не полно.

Ниже мы приводим ряд утверждений, где от H требуется полнота.

Итак, пусть H есть полное линейное бесконечномерное пространство со скалярным произведением — *гильбертово пространство* (таким является пространство $L_2(\Omega)$).

Теорема 4. *Ряд по ортонормированой системе*

$$\sum_1^\infty \alpha_k \varphi_k,$$

где

$$\sum_1^\infty |\alpha_k|^2 < \infty, \tag{16}$$

сходится в метрике H к некоторому элементу $\varphi \in H$.

Доказательство. Пусть

$$s_n = \sum_1^n \alpha_k \varphi_k \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

В силу сходимости ряда (16) для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что для $n > N$ и всякого p

$$\varepsilon^2 > \sum_{n+1}^{n+p} |\alpha_k|^2 = \left\| \sum_{n+1}^{n+p} \alpha_k \varphi_k \right\|^2 = \| s_{n+p} - s_n \|^2.$$

Это показывает, что последовательность элементов $s_n \in H$ удовлетворяет условию Коши и вследствие полноты H существует элемент $\varphi \in H$, к которому эта последовательность сходится (в метрике H), что и доказывает теорему.

Теорема 5. *Ряд Фурье*

$$\sum_1^\infty (f, \varphi_k) \varphi_k \tag{17}$$

произвольного элемента $f \in H$ сходится (в метрике H) к некото-

*) Полная система в H и полное пространство H — разные вещи. Например, система φ_k может быть полной в неполном пространстве H.

рому элементу $\varphi \in H$ и при этом элемент $f-\varphi$ ортогонален ко всем φ_k:

$$(f-\varphi, \varphi_k) = 0 \quad (k=1, 2, \ldots).$$

Доказательство. Согласно неравенству Парсеваля ряд

$$\sum_1^\infty |(f, \varphi_k)|^2 \leqslant (f, f)$$

сходится. Поэтому в силу предыдущей теоремы ряд (17) сходится к некоторому элементу $\varphi \in H$:

$$\varphi = \sum_1^\infty (f, \varphi_k)\varphi_k.$$

Итак,

$$f-\varphi = f - \sum_1^\infty (f, \varphi_k)\varphi_k,$$

где справа стоит ряд, сходящийся в метрике H. Помножим скалярно все члены последнего равенства на элемент φ_s. Тогда получим

$$(f-\varphi, \varphi_s) = (f, \varphi_s) - (f, \varphi_s) = 0 \quad (s=1, 2, \ldots).$$

Утверждение доказано.

Докажем обратную теорему к теореме 3 (при условии полноты H).

Теорема 6. *Если H полно, то из замкнутости ортонормированной системы* (1) *следует ее полнота.*

Доказательство. Пусть система (1) замкнута, но не полна. Тогда на основании теоремы 1 должен найтись элемент $f \in H$ такой, что его ряд Фурье не сходится к нему. Но он сходится, как было доказано выше, к некоторому элементу $\varphi \in H$, и элемент $f-\varphi$ ортогонален ко всем φ_k $(k=1, 2, \ldots)$. Но вследствие замкнутости системы в таком случае $f-\varphi=\theta$, т. е. $f=\varphi$, и мы пришли к противоречию.

Пример 1. l_2 обозначает множество последовательностей

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$$

(комплексных или дествительных) чисел, для которых конечна норма

$$\|\boldsymbol{\alpha}\| = \left(\sum_1^\infty |\alpha_k|^2\right)^{1/2}. \tag{18}$$

Если $\boldsymbol{\alpha} \in l_2$ и $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots) \in l_2$, то при любом натуральном n (см. § 6.2, (9))

$$\sum_1^n |\alpha_j \bar{\beta}_j| \leqslant \left(\sum_{j=1}^n |\alpha_j|^2\right)^{1/2} \left(\sum_1^n |\beta_j|^2\right)^{1/2} \leqslant \|\boldsymbol{\alpha}\| \|\boldsymbol{\beta}\|;$$

поэтому ряд $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \sum_1^\infty \alpha_j \bar{\beta}_j$ абсолютно сходится.

Легко проверяется, что (α, β) подчиняется условиям 1), 2), 3) скалярного произведения, порождающего норму (18) (см. § 6.2) с нулевым элементом $\theta = (0, 0, 0, \ldots)$. Следовательно, l_2 — *линейное пространство со скалярным произведением. Оно к тому же полно и бесконечномерно, таким образом, гильбертово.* В самом деле, пусть дана последовательность элементов $\alpha^k = \left(\alpha_1^k, \alpha_2^k, \ldots\right) \in l_2$ $(k = 1, 2, \ldots)$, удовлетворяющая условию Коши, т. е. для всякого $\varepsilon > 0$ найдется N такое, что

$$\varepsilon > \|\alpha^k - \alpha^{k'}\| \geqslant \left|\alpha_j^k - \alpha_j^{k'}\right| \qquad (k, k' > N).$$

Следовательно, при любом j $\alpha_j^k \to \alpha_j$ $(k \to \infty)$, и мы получили числовую последовательность $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$. Она принадлежит к l_2, потому что

$$\varepsilon \geqslant \left(\sum_{j=1}^{n} \left|\alpha_j^k - \alpha_j\right|^2\right)^{1/2} \qquad (k > N),$$

каково бы ни было натуральное n. Поэтому

$$\varepsilon \geqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|\alpha_j^k - \alpha_j\right|^2\right)^{1/2} = \|\alpha^k - \alpha\| \qquad (k > N). \tag{19}$$

Таким образом, $\alpha^k - \alpha \in l_2$; но $\alpha^k \in l_2$, поэтому и $\alpha \in l_2$. Наконец, неравенство (19) говорит, что наша последовательность элементов $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \ldots$ сходится к $\alpha \in l_2$ в метрике l_2. Этим полнота l_2 доказана.

Определим в l_2 элементы (множество их счетно)

$$\mathbf{e}^k = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, 0, \ldots) \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

где 1 стоит на k-м месте, а на остальных местах стоят нули. Они образуют ортогональную и нормальную (следовательно, линейно независимую) систему:

$$(\mathbf{e}^k, \mathbf{e}^l) = \delta_{kl} \qquad (k, l = 1, 2, \ldots).$$

Если $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots)$ — произвольный элемент из l_2, то, очевидно,

$$\alpha_k = (\alpha, \mathbf{e}^k) \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

и

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha, \mathbf{e}^k)\, \mathbf{e}^k,$$

где ряд справа сходится к α в метрике l_2, так как

$$\left\|\alpha - \sum_{k=1}^{N} (\alpha, \mathbf{e}^k)\, \mathbf{e}^k\right\| = \|(0, 0, \ldots, 0, \alpha_{N+1}, \alpha_{N+2}, \ldots)\| =$$

$$= \left(\sum_{N+1}^{\infty} |\alpha_k|^2\right)^{1/2} \to 0 \qquad (N \to \infty).$$

Мы видим, что произвольный элемент $\alpha \in l_2$ разлагается в сходящийся к нему в метрике l_2 ряд Фурье по элементам ортогональной и нормальной системы $\{\mathbf{e}^k\}$. Таким образом, *система* $\{\mathbf{e}^k\}$ *полна в* l_2.

Теорема 7. *Пусть в линейном пространстве H со скалярным произведением имеется полная ортонормированная система элементов (бесконечная)*

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \tag{20}$$

и каждый элемент $f \in H$ разложен в ряд Фурье по этой системе:

$$f = \sum_1^\infty \alpha_k \varphi_k, \tag{21}$$

$$\alpha_k = (f, \varphi_k) \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{22}$$

сходящийся к f в метрике H (см. теорему 1). Тогда, если H полно, то равенство (21) осуществляет взаимно однозначное соответствие $f \sim \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ между элементами H и l_2, изоморфное относительно операций сложения, умножения на число и скалярного произведения, т. е. если $f \sim \alpha$, $\varphi \sim \beta$, то $f + \varphi \sim \sim \alpha + \beta$, $cf \sim c\alpha$,

$$(f, \varphi)_H = \sum_1^\infty \alpha_j \bar{\beta}_j = (\alpha, \beta)_{l_2}. \tag{23}$$

Если же H не полно, то (21) осуществляет соответствие (линейное и изоморфное) между H и l_2', где l_2' — некоторое линейное не полное подпространство l_2, однако такое, что замыкание l_2' есть l_2 $(\bar{l}_2' = l_2)$.

Доказательство. Операцию (21), приводящую в соответствие каждому элементу $f \in H$ числовую последовательность $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$, обозначим через A, при этом в силу полноты системы (20) имеет место равенство Парсеваля $(Af = \alpha \in l_2)$

$$\|f\|_H = \|Af\|_{l_2}. \tag{24}$$

Очевидно, A — линейная операция:

$$A(cf) = cAf, \quad A(f + \varphi) = Af + A\varphi$$

(c — числа, f, $\varphi \in H$). Больше того, на основании теоремы 2 имеет место равенство (23), более общее, чем (24).

Двум разным элементам f', $f'' \in H$ при помощи операции A соответствуют разные элементы α', $\alpha'' \in l_2$, так как из равенства $Af' = Af'' = \alpha$ следует, что $A(f' - f'') = \theta$, и тогда ряд Фурье $f' - f''$ по системе (20) имеет вид

$$f' - f'' = 0 \cdot \varphi_1 + 0 \cdot \varphi_2 + \ldots$$

Он в силу полноты системы (20) должен сходиться в метрике H к $f' - f''$, но тогда $f' - f'' = \theta$, т. е. $f' = f''$.

Пусть теперь H — полное пространство. Зададим произвольный элемент $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots) \in l_2$ и составим формально ряд

$$\sum_1^\infty \alpha_k \varphi_k. \tag{25}$$

В силу сходимости ряда $\sum_1^\infty |\alpha_k^2| < \infty$ и полноты H (теорема 4) существует элемент $\varphi \in H$ (единственный), к которому ряд (25) сходится:

$$\varphi = \sum_{1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k, \tag{26}$$

Ряд (26) есть ряд Фурье φ (см. следствие к лемме 1).

Мы доказали, что каков бы ни был элемент $\boldsymbol{\alpha} \in l_2$, существует единственный элемент $\varphi \in H$ такой, что $A\varphi = \boldsymbol{\alpha}$. Это свойство вместе с уже установленными выше свойствами A можно резюмировать так: если H полно, то операция A устанавливает взаимно однозначное соответствие $H \rightleftarrows l_2$, изоморфное относительно операций сложения, умножения на число и скалярного произведения. Этим доказана первая часть утверждения теоремы 7.

Пусть теперь H не полно. Обозначим через l_2' образ H при помощи операции $A\left(l_2' = AH\right)$. На основании доказанного выше A устанавливает взаимно однозначное соответствие $H \rightleftarrows l_2'$, изоморфное относительно сложения, умножения на число и скалярного произведения.

В H имеется последовательность элементов $f^1, f^2, f^3, \ldots$, удовлетворяющая условию Коши, но не сходящаяся в H к какому бы то ни было элементу из H. Имеем, что для любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$\varepsilon > \| f^k - f^l \|_H = \| \boldsymbol{\alpha}^k - \boldsymbol{\alpha}^l \|_{l_2} \qquad \left(\boldsymbol{\alpha}^k = Af^k\right)$$

для всех $k, l > N$ при достаточно большом N, показывающее, что образы $\boldsymbol{\alpha}^k = Af^k$ удовлетворяют условию Коши в метрике числовых последовательностей l_2. Но пространство l_2 полно, поэтому существует элемент $\boldsymbol{\alpha} \in l_2$ такой, что $\|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}^k\|_{l_2} \to 0$ $(k \to \infty)$. При этом среди элементов, принадлежащих к H, не может существовать элемента f, для которого бы $Af = \alpha$, ведь если бы он существовал, то было бы

$$\|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}^k\|_{l_2} = \| f - f^k \|_H \to 0 \qquad (k \to \infty),$$

и мы пришли бы к противоречию с предположением.

Это показывает, что l_2' есть не полное пространство. Но замыкание l_2' есть $l_2\left(\overline{l_2'} = l_2\right)$, потому что, каков бы ни был элемент $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots) \in l_2$, элементы $\boldsymbol{\alpha}^N = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N, 0, 0, \ldots)$ при любом N принадлежат к l_2' и в то же время $\|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}^N\|_{l_2} \to 0$ $(N \to \infty)$ $\left(\boldsymbol{\alpha}^N \in l_2'\right.$ потому, что суммы $\sum_{1}^{N} \alpha_k \varphi_k \in H$, ведь $\varphi_k \in H$, а H — линейное множество$)$.

Этим доказано и второе утверждение теоремы.

Пример 2. Пусть $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots$ — кубы, принадлежащие к Ω и пересекающиеся попарно разве что по своим границам, и пусть

$$\varphi_k(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\Delta_k|^{1/2}} \varphi_{\Delta_k}(\mathbf{x}) \qquad (k = 1, 2, \ldots), \tag{27}$$

где

$$\varphi_{\Delta_k}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \Delta_k, \\ 0, & \mathbf{x} \notin \Delta_k. \end{cases}$$

Система (27), очевидно, ортогональная и нормальная, но не полная в $L_2'(\Omega)$ (и $L_2(\Omega)$!), потому что, например, ряд Фурье функции

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} \psi(\mathbf{x}) & \text{на} \quad \Delta_1, \\ 0 & \text{вне} \quad \Delta_1, \end{cases}$$

где $\psi(\mathbf{x})$ — функция непрерывная, тождественно не равная никакой постоянной, имеет вид

$$f(\mathbf{x}) \sim \frac{1}{|\Delta_1|^{1/2}} \int_{\Delta_1} \psi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \varphi_{\Delta_1}(\mathbf{x}) + 0 + 0 + \ldots \tag{28}$$

и правая часть (28) вовсе не сходится в смысле среднего квадратического к левой.

§ 14.7. Ортогонализация системы

Теорема 1. *Пусть в действительном линейном пространстве H со скалярным произведением задана линейно независимая система элементов*

$$\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots \tag{1}$$

Существует и притом единственная, с точностью до знаков ортогональная и нормальная система элементов

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \tag{2}$$

принадлежащих H, обладающая следующим свойством:

При любом натуральном k

$$\psi_k = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^{(k)} \varphi_j \qquad \left(\alpha_k^{(k)} \neq 0\right), \tag{3}$$

и, наоборот,

$$\varphi_k = \sum_{j=1}^{k} \beta_j^{(k)} \psi_j \qquad \left(\beta_k^{(k)} \neq 0\right), \tag{4}$$

где $\alpha_j^{(k)}$, $\beta_j^{(k)}$ — числа (действительные).

Если система (1) конечна и состоит из n элементов, то и ортогональная система (2) обладает этим свойством.

Выражение «единственная система $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ с точностью до знаков» надо понимать в том смысле, что если система (2), удовлетворяющая условиям теоремы, найдена и если все φ_k помножить на $\delta_k = \pm 1$, где знаки $\pm$ могут зависеть от k, то полученные системы снова удовлетворяют условиям теоремы, но никаких других удовлетворяющих условиям теоремы систем нет,