где

$$\varphi_{\Delta_k}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Delta_k, \\ 0, & x \notin \Delta_k. \end{cases}$$

Система (27), очевидно, ортогональная и нормальная, но не полная в $L_2'(\Omega)$ (и $L_2(\Omega)$!), потому что, например, ряд Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{на} \quad \Delta_1, \\ 0 & \text{вне} \quad \Delta_1, \end{cases}$$

где $\psi(x)$ — функция непрерывная, тождественно не равная никакой постоянной, имеет вид

$$f(x) \sim \frac{1}{|\Delta_1|^{1/2}} \int\limits_{\Delta_1} \psi(x)\,dx\varphi_{\Delta_1}(x) + 0 + 0 + \ldots \tag{28}$$

и правая часть (28) вовсе не сходится в смысле среднего квадратического к левой.

§ 14.7. Ортогонализация системы

Теорема 1. *Пусть в действительном линейном пространстве H со скалярным произведением задана линейно независимая система элементов*

$$\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots \tag{1}$$

Существует и притом единственная, с точностью до знаков ортогональная и нормальная система элементов

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \tag{2}$$

принадлежащих H, обладающая следующим свойством:

При любом натуральном k

$$\psi_k = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^{(k)} \varphi_j \qquad \left(\alpha_k^{(k)} \neq 0\right), \tag{3}$$

и, наоборот,

$$\varphi_k = \sum_{j=1}^{k} \beta_j^{(k)} \psi_j \qquad \left(\beta_k^{(k)} \neq 0\right), \tag{4}$$

где $\alpha_j^{(k)}$, $\beta_j^{(k)}$ — числа (действительные).

Если система (1) конечна и состоит из n элементов, то и ортогональная система (2) обладает этим свойством.

Выражение «единственная система $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ с точностью до знаков» надо понимать в том смысле, что если система (2), удовлетворяющая условиям теоремы, найдена и если все φ_k помножить на $\delta_k = \pm 1$, где знаки $\pm$ могут зависеть от k, то полученные системы снова удовлетворяют условиям теоремы, но никаких других удовлетворяющих условиям теоремы систем нет, Доказательство. Элемент ψ_1 образует по условию линейно независимую систему, состоящую из одного элемента, и потому

$$\|\psi_1\| = (\psi_1, \psi_1)^{1/2} > 0;$$

так как должно быть $\varphi_1 = \beta_1^{(1)}\psi_1$, $\|\varphi_1\| = 1$, то $\beta_1^{(1)} = \pm\frac{1}{\|\psi_1\|} (\neq 0)$. Тогда и $\psi_1 = \alpha_1^{(1)}\varphi_1$, где $\alpha_1^{(1)} = \pm\|\psi_1\| (\neq 0)$. Этим утверждение доказано при $k = 1$.

Пусть теперь известно, что можно построить ортогональную и нормальную систему элементов $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ и притом единственным образом с точностью до знака, так что выполняются равенства (3) и (4). Покажем, что эту систему можно пополнить элементом φ_{k+1} и притом единственным образом с точностью до знака так, что полученная система $\varphi_1, \ldots, \varphi_{k+1}$ будет ортогональной и нормальной и будет удовлетворять условиям (3) и (4), где надо заменить k на $k+1$.

Искомый элемент φ_{k+1} должен иметь вид

$$\varphi_{k+1} = \sum_{j=1}^{k+1} \beta_j^{(k+1)}\psi_j = \beta_{k+1}^{(k+1)}\psi_{k+1} + \sum_{j=1}^{k} \gamma_j\varphi_j. \tag{5}$$

Во втором равенстве мы заменили $\psi_1, \ldots, \psi_k$ на равные им линейные комбинации из φ_j с индексами $j \leqslant k$, затем привели подобные при одинаковых φ_j. Это возможно потому, что утверждение верно при k. По условию элемент φ_{k+1} должен быть ортогональным ко всем φ_s $(s = 1, \ldots, k)$; поэтому должно быть

$$(\varphi_{k+1}, \varphi_s) = \beta_{k+1}^{(k+1)}(\psi_{k+1}, \varphi_s) + \gamma_s = 0 \qquad (s = 1, \ldots, k).$$

Но тогда, подставляя γ_s в (5), получим

$$\varphi_{k+1} = \beta_{k+1}^{(k+1)}\left[\psi_{k+1} - \sum_{j=1}^{k}(\psi_{k+1}, \varphi_j)\varphi_j\right].$$

Элемент

$$\psi_{k+1}^{*} = \psi_{k+1} - \sum_{j=1}^{k}(\psi_{k+1}, \varphi_j)\varphi_j$$

не может быть нулевым, потому что иначе элемент ψ_{k+1} был бы линейной комбинацией из элементов φ_j $(j = 1, \ldots, k)$; но тогда на основании уже доказанного при k элемент ψ_{k+1} был бы также линейной комбинацией из элементов ψ_j $(j = 1, \ldots, k)$, что противоречило бы линейной независимости системы $\psi_1, \ldots, \psi_{k+1}$.

Итак,

$$\|\psi_{k+1}^{*}\| > 0.$$

Это позволяет удовлетворить требованию $\|\varphi_{k+1}\| = 1$, в силу которого число $\beta_{k+1}^{(k+1)}$ определяется с точностью до знака:

$$\beta_{k+1}^{(k+1)} = \pm \frac{1}{\left\|\psi_{k+1}^{*}\right\|}.$$

Теорема доказана.

Процесс, при помощи которого строилась ортогональная и нормальная система (2), в указанном выше смысле эквивалентная линейно независимой системе (1), называется *процессом ортогонализации* (*системы* (1)).

Теорема 2. *Системы элементов из* H

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3,\ \ldots \tag{6}$$

и

$$\psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3,\ \ldots \tag{7}$$

связанные при любом $k=1, 2, \ldots$ *соотношениями* (3) *и* (4), *одновременно полны или же не полны в* H.

Здесь H можно считать произвольным нормированным пространством, в котором может и не быть определено скалярное произведение.

В самом деле, пусть система (6) полна в H и f — произвольный элемент H. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется сумма вида

$$\sum_{1}^{N} \alpha_k \varphi_k, \tag{8}$$

где α_k — числа, такая, что

$$\varepsilon > \left\| f - \sum_{1}^{N} \alpha_k \varphi_k \right\|.$$

Но в силу равенств (4) сумма (8) есть некая сумма вида

$$\sum_{1}^{N} \beta_k \psi_k,$$

где β_k — числа, поэтому система (7) полна в H.

Аналогично доказывается с помощью равенств (3), что полнота системы (7) влечет полноту системы (6).

Теорема 3. *Пусть H есть пространство со скалярным произведением, обладающее следующим свойством: существует в H линейно независимая система элементов*

$$\psi_1,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_n \tag{9}$$

такая, что, каковы бы ни были элементы $f \in H$ и положительное число $\varepsilon > 0$, найдутся (зависящие от ε) числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ такие, что

$$\left\| f - \sum_{1}^{n} \alpha_k \psi_k \right\| < \varepsilon. \tag{10}$$

Тогда найдутся также числа $\beta_1, \ldots, \beta_n$ *такие, что*

$$f = \sum_1^n \beta_k \psi_k, \tag{11}$$

т. е. H есть n-мерное пространство.

Доказательство. Ортогонализуем систему (9) и в результате получим ортогональную и нормальную систему

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n. \tag{12}$$

Очевидно, что для всяких элемента $f \in H$ и числа $\varepsilon > 0$ найдутся числа $a_1, \ldots, a_n$ такие, что

$$\varepsilon > \left\| f - \sum_1^n a_k \varphi_k \right\| \geqslant \left\| f - \sum_1^n (f, \varphi_k) \varphi_k \right\|, \tag{13}$$

где второе неравенство написано в силу минимального свойства ортогональной и нормальной системы (см. § 14.6, (6)). Но третий член в цепи (13) не зависит от ε, которое произвольно. Поэтому он равен нулю, т. е.

$$f = \sum_1^n (f, \varphi_k) \varphi_k. \tag{14}$$

Чтобы получить (11), остается только φ_k в (14) заменить на соответствующие линейные комбинации из ψ_k.

Таким образом, мы доказали лемму 1 § 14.5 в предположении, что E — пространство со скалярным произведением.

§ 14.8. Свойства пространств $L_2'(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$

Пространство $L_2'(\Omega)$ было определено как пространство функций $f(x)$ таких, что их интегралы $\int_\Omega f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$, если имеют, то конечное число особых точек, и так, что норма

$$\|f\|_{L_2} = \left(\int_\Omega |f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} < \infty \tag{1}$$

конечна. Так как в этом определении интеграл мы понимаем в римановском (вообще несобственном) смысле, то пространство $L_2'(\Omega)$ не полно (§ 19.7). Однако пространство $L_2'(\Omega)$ обладает многими свойствами, которым обладает гильбертово (полное) пространство $L_2(\Omega)$, определение которого базируется на понятии интеграла Лебега. Перечислим основные из этих свойств, хотя почти обо всех них мы уже говорили.

1) Для любых двух функций $f, \varphi \in L_2'(\Omega)$ имеет смысл скалярное произведение

$$(f, \varphi) = \int_\Omega f\overline{\varphi}\, d\mathbf{x},$$

порождающее норму (1).