Тогда найдутся также числа $\beta_1, \ldots, \beta_n$ *такие, что*

$$f = \sum_1^n \beta_k \psi_k, \tag{11}$$

т. е. H есть n-мерное пространство.

Доказательство. Ортогонализуем систему (9) и в результате получим ортогональную и нормальную систему

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n. \tag{12}$$

Очевидно, что для всяких элемента $f \in H$ и числа $\varepsilon > 0$ найдутся числа $a_1, \ldots, a_n$ такие, что

$$\varepsilon > \left\| f - \sum_1^n a_k \varphi_k \right\| \geqslant \left\| f - \sum_1^n (f, \varphi_k) \varphi_k \right\|, \tag{13}$$

где второе неравенство написано в силу минимального свойства ортогональной и нормальной системы (см. § 14.6, (6)). Но третий член в цепи (13) не зависит от ε, которое произвольно. Поэтому он равен нулю, т. е.

$$f = \sum_1^n (f, \varphi_k) \varphi_k. \tag{14}$$

Чтобы получить (11), остается только φ_k в (14) заменить на соответствующие линейные комбинации из ψ_k.

Таким образом, мы доказали лемму 1 § 14.5 в предположении, что E — пространство со скалярным произведением.

§ 14.8. Свойства пространств $L_2'(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$

Пространство $L_2'(\Omega)$ было определено как пространство функций $f(x)$ таких, что их интегралы $\int_\Omega f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$, если имеют, то конечное число особых точек, и так, что норма

$$\|f\|_{L_2} = \left(\int_\Omega |f(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} \right)^{1/2} < \infty \tag{1}$$

конечна. Так как в этом определении интеграл мы понимаем в римановском (вообще несобственном) смысле, то пространство $L_2'(\Omega)$ не полно (§ 19.7). Однако пространство $L_2'(\Omega)$ обладает многими свойствами, которым обладает гильбертово (полное) пространство $L_2(\Omega)$, определение которого базируется на понятии интеграла Лебега. Перечислим основные из этих свойств, хотя почти обо всех них мы уже говорили.

1) Для любых двух функций $f, \varphi \in L_2'(\Omega)$ имеет смысл скалярное произведение

$$(f, \varphi) = \int_\Omega f \bar{\varphi} \, d\mathbf{x},$$

порождающее норму (1).

2) В $L_2'(\Omega)$ имеется счетная система функций

$$\lambda_1(\mathbf{x}),\ \lambda_2(\mathbf{x}),\ \lambda_3(\mathbf{x}),\ \ldots \tag{2}$$

(кусочно постоянных с рациональными параметрами), плотная в $L_2'(\Omega)$ ($L_2(\Omega)$) (теорема 5, § 14.4).

3) $L_2'(\Omega)$ — бесконечномерное пространство; в нем имеется бесконечная линейно независимая система функций (например, характеристических функций кубов $\Delta \subset \Omega$, см. пример 2, § 14.6).

4) Благодаря свойствам 2), 3) пространство $L_2'(\Omega)$ называется сепарабельным (счетномерным). Из сепарабельности пространства $L_2'(\Omega)$ следует, что из системы (2) (плотной в $L_2'(\Omega)$) можно выбросить некоторые элементы так, что оставшаяся система

$$\psi_1(\mathbf{x}),\ \psi_2(\mathbf{x}),\ \psi_3(\mathbf{x}),\ \ldots \tag{3}$$

будет линейно независимой и полной в $L_2'(\Omega)$ (см. доказательство теоремы 2, § 14.5).

5) Полную линейно независимую систему (3) можно ортогонализировать и получить снова полную в $L_2'(\Omega)$, но уже ортогональную и нормальную счетную систему функций

$$\varphi_1(\mathbf{x}),\ \varphi_2(\mathbf{x}),\ \varphi_3(\mathbf{x}),\ \ldots \tag{4}$$

(теоремы 1 и 2, § 14.7). Это показывает существование в $L_2'(\Omega)$ полной ортогональной и нормальной системы функций. На самом деле таких систем имеется бесконечное множество, подобно тому как в трехмерном евклидовом пространстве имеется бесконечное число троек попарно перпендикулярных единичных векторов. С некоторыми такими важными системами мы еще будем иметь дело.

6) Всякую функцию $f \in L_2'(\Omega)$ можно разложить в ряд Фурье по ортогональной и нормальной системе (4)

$$f(\mathbf{x}) = \sum_1^\infty \alpha_k \varphi_k(\mathbf{x}),$$

сходящийся вследствие ее полноты к $f(\mathbf{x})$ в смысле среднего квадратического. При этом числа (коэффициенты Фурье f)

$$\alpha_k = (f,\ \varphi_k) \tag{5}$$

подчиняются равенству Парсеваля

$$(f,\ f) = \sum_1^\infty |\alpha_k|^2 < \infty \tag{6}$$

(теорема 1, § 14.6).

Равенства (5) устанавливают взаимно однозначное соответствие

$$L_2'(\Omega) \rightleftarrows l_2' \tag{7}$$

между функциями $f \in L_2'(\Omega)$ и числовыми последовательностями $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots) \in l_2' \subset l_2$, где l_2' есть некоторое не полное линейное подпространство l_2. При этом соответствие (7) есть изоморфизм относительно операций сложения, умножения на число и скалярного произведения (теорема 7, § 14.6).

В силу изоморфизма (7) неполному пространству $L_2'(\Omega)$ соответствует тоже не полное подпространство $l_2' \subset l_2$. Однако замыкание l_2' есть $l_2\left(\overline{l_2'} = l_2\right)$.

Сделаем теперь соответствующие замечания относительно пространства $L_2(\Omega)$ функций, квадраты модулей которых интегрируемы на Ω в лебеговом смысле.

Как уже отмечалось выше, $L_2(\Omega)$ есть линейное полное пространство со скалярным произведением. Кусочно постоянные функции с рациональными параметрами (см. § 14.4) образуют в $L_2(\Omega)$ плотное множество, так же как они образуют плотное множество в $L_2'(\Omega)$. Но тогда ортогональная и нормальная система (4) является полной не только в $L_2'(\Omega)$, но и в $L_2(\Omega)$.

Теперь на основании теоремы 7 § 14.6 можно сказать, что равенства (5) устанавливают взаимно однозначное и изоморфное (относительно операций сложения, умножения на число и скалярного произведения) соответствие

$$L_2(\Omega) \rightleftarrows l_2 \tag{8}$$

между элементами $L_2(\Omega)$ и всеми элементами l_2. Далее, замыкание $L_2'(\Omega)$ в метрике $L_2(\Omega)$ есть $L_2(\Omega)$, потому что если f есть произвольная функция из $L_2(\Omega)$, то ей в силу изоморфизма (8) соответствует элемент $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots) \in l_2$ и

$$\int_\Omega \left| f(\mathbf{x}) - \sum_1^N \alpha_k \varphi_k(\mathbf{x}) \right|^2 d\mathbf{x} = \sum_{N+1}^\infty |\alpha_k|^2 \to 0 \quad (N \to \infty), \tag{9}$$

где суммы $\sum\limits_1^N \alpha_k \varphi_k \in L_2'(\Omega)$, а интеграл (9) понимается в лебеговом смысле.

§ 14.9. Полнота системы функций в C, L_2' и L' (L_2, L)

Теорема. *Пусть Ω — открытое измеримое (ограниченное) множество.*

1) *Если система функций*

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$$