Равенства (5) устанавливают взаимно однозначное соответствие

$$L_2'(\Omega) \rightleftarrows l_2' \tag{7}$$

между функциями $f \in L_2'(\Omega)$ и числовыми последовательностями $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots) \in l_2' \subset l_2$, где l_2' есть некоторое не полное линейное подпространство l_2. При этом соответствие (7) есть изоморфизм относительно операций сложения, умножения на число и скалярного произведения (теорема 7, § 14.6).

В силу изоморфизма (7) неполному пространству $L_2'(\Omega)$ соответствует тоже не полное подпространство $l_2' \subset l_2$. Однако замыкание l_2' есть $l_2 (\overline{l}_2' = l_2)$.

Сделаем теперь соответствующие замечания относительно пространства $L_2(\Omega)$ функций, квадраты модулей которых интегрируемы на Ω в лебеговом смысле.

Как уже отмечалось выше, $L_2(\Omega)$ есть линейное полное пространство со скалярным произведением. Кусочно постоянные функции с рациональными параметрами (см. § 14.4) образуют в $L_2(\Omega)$ плотное множество, так же как они образуют плотное множество в $L_2'(\Omega)$. Но тогда ортогональная и нормальная система (4) является полной не только в $L_2'(\Omega)$, но и в $L_2(\Omega)$.

Теперь на основании теоремы 7 § 14.6 можно сказать, что равенства (5) устанавливают взаимно однозначное и изоморфное (относительно операций сложения, умножения на число и скалярного произведения) соответствие

$$L_2(\Omega) \rightleftarrows l_2 \tag{8}$$

между элементами $L_2(\Omega)$ и всеми элементами l_2. Далее, замыкание $L_2'(\Omega)$ в метрике $L_2(\Omega)$ есть $L_2(\Omega)$, потому что если f есть произвольная функция из $L_2(\Omega)$, то ей в силу изоморфизма (8) соответствует элемент $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots) \in l_2$ и

$$\int_\Omega \left| f(\mathbf{x}) - \sum_1^N \alpha_k \varphi_k(\mathbf{x}) \right|^2 d\mathbf{x} = \sum_{N+1}^\infty |\alpha_k|^2 \to 0 \quad (N \to \infty), \tag{9}$$

где суммы $\sum_1^N \alpha_k \varphi_k \in L_2'(\Omega)$, а интеграл (9) понимается в лебеговом смысле.

§ 14.9. Полнота системы функций в C, L_2' и L' (L_2, L)

Теорема. *Пусть Ω — открытое измеримое (ограниченное) множество.*

1) *Если система функций*

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$$

полна в $C(\overline{\Omega})$, *то она полна и в* $L_2'(\Omega)$. 2) *Если же она полна в* $L_2'(\Omega)$, *то полна и в* $L'(\Omega)$.

Доказательство. Имеют место очевидные неравенства

$$\left(\int_\Omega \left|f(\mathbf{x}) - \sum_1^N \alpha_k\varphi_k(\mathbf{x})\right|^2 d\mathbf{x}\right)^{1/2} \leqslant \sqrt{|\Omega|}\max_x \left|f(\mathbf{x}) - \sum_1^N \alpha_k\varphi_k(\mathbf{x})\right|, \quad (1)$$

$$\int_\Omega \left|f - \sum_1^N \alpha_k\varphi_k\right| d\mathbf{x} \leqslant \sqrt{|\Omega|}\left(\int_\Omega \left|f - \sum_1^N \alpha_k\varphi_k\right|^2 d\mathbf{x}\right)^{1/2} \quad (2)$$

(см. § 14.2 (13)). Первое из них верно в предположении, что φ_k, $f \in C(\Omega)$, а второе — что φ_k, $f \in L_2'(\Omega)$ (L_2).

Если система φ_k полна в $C(\Omega)$ $(L_2'(\Omega)$ или $L_2(\Omega))$, то найдется конечная сумма $\sum_1^N \alpha_k\varphi_k$, для которой правая часть в (1) (соответственно в (2)) меньше ε. Но тогда и левая меньше ε.

Упражнение.

1. Доказать более общее утверждение: если система (1) полна в $C(\Omega)$, то и в $L_p'(\Omega)$ $(1 \leqslant p < \infty)$, если же она полна в $L_{p'}'(\Omega)$ и $1 \leqslant p < p' < \infty$, то полна также в $L_p'(\Omega)$, где Ω — измеримое (ограниченное) множество.