Глава 15

РЯДЫ ФУРЬЕ. ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ

§ 15.1. Предварительные сведения

Система тригонометрических функций

$$\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 3x, \ldots \tag{1}$$

ортогональна на отрезке $[0, 2\pi]$, т. е. интеграл на $[0, 2\pi]$ от произведения двух разных функций этой системы равен нулю. Это вытекает из равенств

$$\int_0^{2\pi} \cos kx \cos lx \, dx = 0 \quad (k \neq l, \; k, l = 0, 1, \ldots),$$

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \sin lx \, dx = 0 \quad (k \neq l, \; k, l = 1, 2, \ldots),$$

$$\int_0^{2\pi} \cos kx \sin lx \, dx = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots; \; l = 1, 2, \ldots),$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 kx \, dx = \int_0^{2\pi} \sin^2 kx \, dx = \pi \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}.$$

Эта глава посвящена теории тригонометрических рядов и вопросам приближения функций тригонометрическими полиномами.

Функция $f(x)$ называется *периодической периода* $2\omega > 0$, если она определена на всей действительной оси и для всякого x удовлетворяет условию

$$f(x + 2\omega) = f(x).$$

Если для такой функции существует интеграл (собственный или несобственный)

$$\int_0^{2\omega} f(x) \, dx,$$

то, каково бы ни было действительное число a,

$$\int_a^{a+2\omega} f(x)\,dx = \int_0^{2\omega} f(x)\,dx. \tag{2}$$

Это видно из рис. 15.1: одинаково затушеванные площади равны.

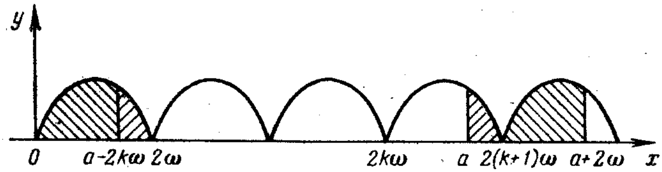

Рис. 15.1.

Но это можно доказать формально. Существует единственное натуральное число k такое, что $2k\omega \leqslant a < 2(k+1)\omega$ и, очевидно,

$$\int_a^{2(k+1)\omega} f(x)\,dx = \int_a^{2(k+1)\omega} f(x-2k\omega)\,dx = \int_{a-2k\omega}^{2\omega} f(z)\,dz,$$

$$\int_{2(k+1)\omega}^{a+2\omega} f(x)\,dx = \int_{2(k+1)\omega}^{a+2\omega} f(x-2(k+1)\omega)\,dx = \int_0^{a-2k\omega} f(z)\,dz.$$

Складывая эти равенства, получим (2).

Очень часто в случае функций периода 2ω приходится употреблять равенство

$$\int_0^{2\omega} f(t-x)\,dt = \int_0^{2\omega} f(t)\,dt, \tag{2'}$$

где x может быть любым значением. Действительно, воспользовавшись (2), имеем

$$\int_0^{2\omega} f(t-x)\,dt = \int_{-x}^{2\omega-x} f(z)\,dz = \int_0^{2\omega} f(t)\,dt.$$

Это равенство будет часто употребляться без пояснений.

Функции системы (1) являются периодическими периода 2π. При этом функции $1, \cos x, \cos 2x, \ldots$ — четные и функции $\sin x$, $\sin 2x, \ldots$ — нечетные.

Для четных функций $f(x)$

$$\int_{-b}^{b} f(x)\,dx = 2\int_0^b f(x)\,dx$$

и для нечетных

$$\int_{-b}^{b} f(x)\,dx = 0.$$

Сумма вида

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

где a_k, b_k — постоянные числа, называется *тригонометрическим полиномом порядка (или степени) n*.

Тригонометрические полиномы мы будем считать простейшими периодическими функциями периода 2π. Ими мы будем приближать другие более или менее произвольные функции периода 2π.

Функцию $f(x)$ периода 2ω можно заменить функцией $F(u) = f(u\omega/\pi)$ периода 2π с помощью подстановки $x = u\omega/\pi$, приблизить эту вторую функцию некоторым тригонометрическим полиномом $F(u) \sim T_n(u)$ и затем вернуться к переменной x:

$$f(x) \sim T_n\left(\frac{\pi}{\omega} x\right).$$

Условимся о некоторых обозначениях и терминологии. $C(a, b)$ есть (§ 14.1) пространство (класс) непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций f с нормой

$$\| f \|_{C(a,b)} = \max_{a \leqslant x \leqslant b} | f(x) |.$$

C^* есть пространство (класс) функций f, непрерывных на действительной оси и имеющих период 2π, с нормой

$$\| f \|_{C^*} = \max_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} | f(x) | = \max_{a \leqslant x \leqslant a+2\pi} | \;\; |.$$

(a — произвольное действительное число).

Функцию $f \in C^*$ можно считать принадлежащей $C(0, 2\pi)$ ($C^* \subset C(0, 2\pi)$), рассматривая ее только на отрезке $[0, 2\pi]$. Однако при этом получается не всякая функция пространства $C(0, 2\pi)$, а такая, что ее значения на концах периода равны между собой:

$$f(0) = f(2\pi). \qquad (3)$$

Наоборот, функция $f \in C(0, 2\pi)$, удовлетворяющая условию (3), после периодического продолжения с периодом 2π превращается в функцию класса C^*.

L'^* есть пространство (класс) функций периода 2π, которые, если их рассматривать на отрезке $[0, 2\pi]$, принадлежат к $L'(0, 2\pi)$ с нормой (см. § 14.2)

$$\| f \|_{L^*} = \| f \|_{L(0,2\pi)} = \int_{0}^{2\pi} | f(x) | \, dx,$$

Про функцию $f(x) \in L'^*$ еще говорят, что она периодическая (периода 2π), абсолютно интегрируемая (на периоде) функция. Напомним, что функция $f \in L'(0, 2\pi)$, если ее интеграл

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx \tag{4}$$

существует по Риману или имеет конечное число особых точек и сходится в несобственном смысле абсолютно (см. § 9.16). $L_2'^*$ есть пространство (класс) функций f периода 2π, которые если их рассматривать на отрезке $[0, 2\pi]$, принадлежат к $L_2'(0, 2\pi)$ с нормой (см. § 14.3)

$$\|f\|_{L_2^*} = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Про функцию $f(x) \in L_2'^*$ говорят еще, что она периодическая (периода 2π) функция с интегрируемым квадратом модуля (на периоде) или еще, в действительном случае, с интегрируемым квадратом. Напомним, что функция $f \in L_2'(0, 2\pi)$ интегрируема по Риману на $[0, 2\pi]$ или, если ее интеграл (4) имеет конечное число особых точек, то квадрат ее модуля интегрируем в несобственном смысле. Подчеркнем еще, что $L_2'^* \subset L'^*$ (см. § 14.2, (13)).

В теории рядов Фурье еще более естественно рассматривать классы (пространства) L^* и L_2^* функций периода 2π, принадлежащих лебеговым пространствам $L(0, 2\pi)$ и соответственно $L_2(0, 2\pi)$.

Читатель уже заметил, что в наших обозначениях звездочка указывает на периодичность (с периодом 2π) функций, составляющих класс.

Функции f указанных классов могут быть действительными и комплексными функциями $f(x) = \varphi(x) + i\psi(x)$ от одной переменной x, поэтому, например, мы говорим «квадрат модуля» функции, а не просто «квадрат функции», что только в действительном случае одно и то же.

Система тригонометрических функций (1) ортогональна и, как мы узнаем в дальнейшем, полна в $L_2'^*\left(L_2^*\right)$ (и даже в C^*). Каждой функции $f \in L_2'^*\left(L_2^*\right)$ можно привести в соответствие ее ряд Фурье (см. § 14.6, (2)) по системе (1)

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{5}$$

где

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos kt\,dt \quad (k = 0, 1, \ldots), \tag{6}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin kt\,dt \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{7}$$

Отдельные функции $\frac{a_0}{2}$, $(a_1\cos x + b_1\sin x)$, $(a_2\cos 2x + b_2\sin 2x)$, ..., входящие в правую часть (5) при условиях (6), (7), называются *членами ряда Фурье функции* f (*гармониками* f).

Заметим, что коэффициенты Фурье a_k и b_k (см. (6) и (7)) имеют на самом деле смысл не только для функций $f \in L_2'^*$, но и для функций $f \in L'^*$ (вообще $f \in L^*$). Ведь функции $\cos kx$, $\sin kx$ ограничены, а функции $f \in L'^*$ абсолютно интегрируемы, но тогда и интегралы, определяющие коэффициенты Фурье $f \in L'(0, 2\pi)$, абсолютно сходятся:

$$\int_0^{2\pi} |f(x)\cos kx|\,dx \leqslant \int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx,$$

$$\int_0^{2\pi} |f(x)\sin kx|\,dx \leqslant \int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx.$$

Поэтому, имея в виду бо́льшую общность, мы будем по возможности рассматривать разложения в ряды Фурье функций, принадлежащих $L'^*(L^*)$.

Итак, каждой функции $f \in L'^*$ (вообще $f \in L^*$) соответствует ее ряд Фурье, независимо от того, сходится он в каких-либо точках x или нет. Существенно заметить, что если функцию $f \in L'^*$ видоизменить, прибавив к ней нулевую в $L'^*(L^*)$ функцию $\theta(x)$, т. е. такую, что

$$\int_0^{2\pi} |\theta(x)|\,dz = 0,$$

например, видоизменить в конечном числе точек, то это не изменяет коэффициенты Фурье f, а следовательно, и сам ряд Фурье функции f. Совокупность коэффициентов Фурье функции называется ее *спектром*. Многие колебательные процессы (колебания) в физике и технике описываются периодическими функциями, вообще периода ω, и тогда u есть время, а $y = F(u)$ есть ордината колеблющейся точки, силы, скорости, силы тока, ... Если F есть тригонометрический полином, то

$$y = F(u) =$$
$$= \frac{a_0}{2} + \sum_1^n \left(a_k\cos\frac{k\pi}{\omega}u + b_k\sin\frac{k\pi}{\omega}u\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^n A_k\cos\left(\frac{k\pi}{\omega}u - \varphi_k\right),$$

где $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$, а φ_k определяются из уравнений $a_k = \cos\varphi_k$, $b_k = \sin\varphi_k$, $0 \leqslant \varphi_k < 2\pi$.

В физике говорят, что *колебательный процесс* $y = F(u)$ *распадается на простейшие колебательные процессы — гармонические колебания* (*гармоники*)

$$A_k \cos\left(\frac{k\pi}{\omega} u - \varphi_k\right). \tag{8}$$

Гармоника (8) имеет частоту k, амплитуду A_k и начальную фазу φ_k. На рис. 15.2 изображены три периодические периода 2π функции: $S_2(x) = \sin x - \frac{\sin 2x}{2}$ (сплошной линией), $S_3(x) = \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3}$ (пунктиром) и $S_4(x) = \sin x - \ldots - \frac{\sin 4x}{4}$ (точками).

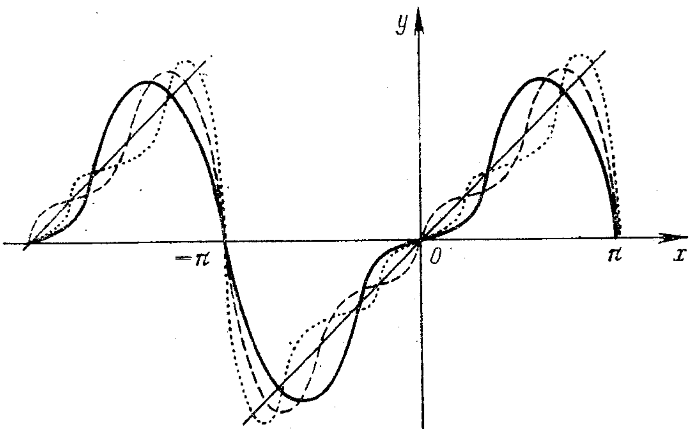

Рис. 15.2.

Для больших n график суммы

$$S_n(x) = \sum_{1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\sin kx}{k} \tag{9}$$

схематически (не точно) изображен на рис. 15.3, что наводит на мысль, и это будет в дальнейшем обосновано, что предельная функция

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) \tag{10}$$

есть периодическая (периода 2π) функция, определяемая равенствами

$$S(x) = x \quad (-\pi < x < \pi), \quad S(\pi) = 0. \tag{11}$$

Функция $S(x)$ разрывна в точках $x_k = (2k+1)\pi$, и потому последовательность непрерывных функций $\{S_n(x)\}$ не может равномерно сходиться к $S(x)$, но она все же равномерно сходится на любом отрезке $[a, b]$, принадлежащем интервалу $(-\pi, \pi)$, вообще любому отрезку оси x, принадлежащему интервалу, на котором $S(x)$ имеет непрерывную производную (см. § 15.5).

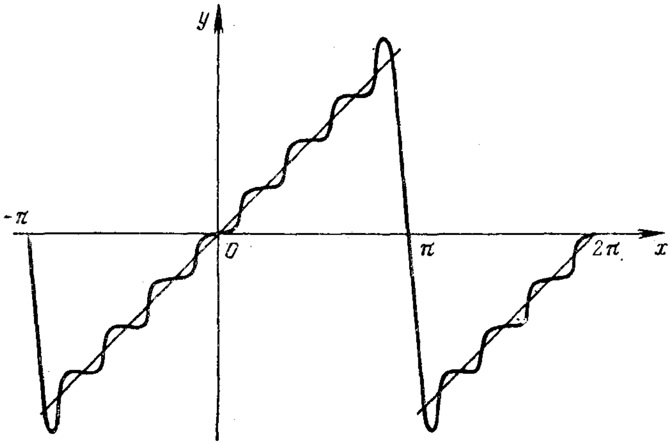

Рис. 15.3.

На рис. 15.3 еще показано, что график $S_n(x)$ возле точек x_k разрыва предельной функции $S(x)$ делает всплески. Это характерное явление для точек разрыва первого рода предельной кусочно гладкой функции, называемое *явлением Гиббса*, будет изучаться в § 15.9.

§ 15.2. Сумма Дирихле

Пусть задана функция $f \in L'^*$ (вообще L^*) и пусть

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1}$$

есть ее ряд Фурье, где, таким образом,

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt \, dt \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin kt \, dt \quad (k = 1, 2, \ldots).$$