Функция $S(x)$ разрывна в точках $x_k = (2k+1)\pi$, и потому последовательность непрерывных функций $\{S_n(x)\}$ не может равномерно сходиться к $S(x)$, но она все же равномерно сходится на любом отрезке $[a, b]$, принадлежащем интервалу $(-\pi, \pi)$, вообще любому отрезку оси x, принадлежащему интервалу, на котором $S(x)$ имеет непрерывную производную (см. § 15.5).

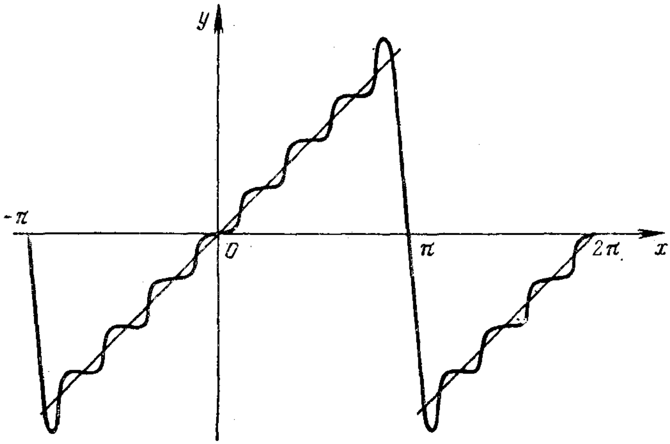

Рис. 15.3.

На рис. 15.3 еще показано, что график $S_n(x)$ возле точек x_k разрыва предельной функции $S(x)$ делает всплески. Это характерное явление для точек разрыва первого рода предельной кусочно гладкой функции, называемое *явлением Гиббса*, будет изучаться в § 15.9.

§ 15.2. Сумма Дирихле

Пусть задана функция $f \in L'^*$ (вообще L^*) и пусть

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1}$$

есть ее ряд Фурье, где, таким образом,

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt \, dt \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin kt \, dt \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Частичная n-я сумма этого ряда может быть преобразована так:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt + \sum_1^n \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)(\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{1}{2} + \sum_1^n \cos k(t-x)\right\} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} D_n(t-x) f(t)\,dt, \quad (2)$$

где (см. § 8.2, (16))

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_1^n \cos kx = \frac{1}{2}\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}. \quad (3)$$

Мы получили компактное выражение для *n-й суммы Фурье функции* $f(x)$:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} D_n(t-x) f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} D_n(u) f(x+u)\,du. \quad (4)$$

В последнем равенстве мы воспользовались периодичностью подынтегральной функции.

Интеграл (4) называется *интегралом Дирихле порядка n*, а полином $D_n(x)$ — *ядром Дирихле порядка n*. Заметим, что при любом x и $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} D_n(t-x)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{1}{2} + \sum_1^n \cos k(t-x)\right\} dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\,dt = 1, \quad (5)$$

потому что

$$\int_0^{2\pi} \cos k(t-x)\,dt = \int_0^{2\pi} \cos kt\,dt = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

В последнем равенстве использована периодичность (период 2π) функции $\cos kt$ и тот факт, что она ортогональна на отрезке $[0, 2\pi]$ к функции, тождественно равной единице.

В лебеговой теории две функции из L^*, равные почти всюду, имеют один и тот же ряд Фурье, т. е. одни и те же соответствующие коэффициенты Фурье.

Всякий ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx), \quad (6)$$

где α_k, β_k — постоянные числа (коэффициенты ряда), называется *тригонометрическим рядом.*

Тригонометрический ряд становится рядом Фурье только тогда, когда существует функция $f \in L^*$, коэффициентами Фурье которой являются соответственно числа a_k, b_k ($a_k = \alpha_k$, $b_k = \beta_k$). Например, если установлено, что ряд (6) сходится в смысле среднего квадратического на $[0, 2\pi]$ к некоторой функции $f \in L_2'^*$ (или L_2^*), то он есть ряд Фурье этой функции (см. следствие леммы 1, § 14.6).

Произведение двух четных или двух нечетных функций есть функция четная, в то время как произведение четной на нечетную функцию есть функция нечетная. Поэтому, если функция $f \in L'^*$ (или L^*) — четная, то ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty a_k \cos kx \quad \left(a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos kt\,dt\right),$$

потому что ее коэффициенты $b_k = 0$, а если она нечетная, то ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^\infty b_k \sin x \quad \left(b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin kt\,dt\right),$$

потому что тогда ее коэффициенты $a_k = 0$.

Если коэффициенты a_k, b_k суммы Фурье n-го порядка функции $f(x)$ периода 2π вычислить приближенно по формуле прямоугольников (см. § 10.6), разделяя период на $2n+1$ равных частей точками

$$x_k = \frac{2\pi k}{2n+1} \quad (k = 0, 1, \ldots, 2n), \tag{7}$$

то получим сумму

$$S_n(f, x) = \frac{a_0^{(n)}}{2} + \sum_1^n \left(a_k^{(n)} \cos kx + b_k^{(n)} \sin kx\right),$$

$$a_k^{(n)} = \frac{2}{2n+1}\sum_{j=0}^{2n} f(x_j)\cos kx_j \quad (k = 0, 1, \ldots, n),$$

$$b_k^{(n)} = \frac{2}{2n+1}\sum_{j=0}^{2n} f(x_j)\sin kx_j \quad (k = 0, 1, \ldots, n),$$

замечательную тем, что она есть тригонометрический полином порядка n, интерполирующий f в узлах (7). Таким образом,

$$f(x_j) = S_n(f, x_j) \quad (j = 0, 1, \ldots, 2n),$$

Легко проверить это утверждение, если учесть, что

$$\frac{2}{2n+1}\sum_{j=0}^{2n} \cos kx_j \cos lx_j = \delta_{kl},$$

$$\frac{2}{2n+1}\sum_{j=0}^{2n} \sin kx_j \sin lx_j = \delta_{kl},$$

$$\frac{2}{2n+1}\sum_{j=0}^{2n} \sin kx_j \cos lx_j = 0 \quad (k, l = 0, 1, \ldots, n).$$

§ 15.3. Формулы для остатка ряда Фурье

Для функции $f \in L'^*$ (вообще L^*) из формул (4) и (5) предыдущего параграфа следует, что

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} D_n(u)\,[f(x+u) - f(x)]\,du =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u)\,\Delta_u f(x)\,du, \qquad (1)$$

где

$$\Delta_u f(x) = f(x+u) - f(x) \qquad (2)$$

(разность f в точке x с шагом u).

В этих преобразованиях мы воспользовались периодичностью подынтегральной функции.

Равенство (1) дает выражение для остаточного члена ряда Фурье. Выяснение вопроса, сходится или нет ряд Фурье функции f в данной точке x к ее значению $f(x)$, и связанные с этим вопросом оценки сходимости сводятся к исследованию поведения интеграла (1) при $n \to \infty$.

Зададим положительное число η, удовлетворяющее неравенствам $0 < \eta \leqslant \pi$, и введем для удобства две функции

$$\mu(u) = \begin{cases} \frac{1}{u}, & |u| < \eta, \\ 0, & \eta \leqslant |u| \leqslant \pi, \end{cases} \qquad (3)$$

$$\nu(u) = \begin{cases} 0, & |u| < \eta, \\ \frac{1}{u}, & \eta \leqslant |u| \leqslant \pi. \end{cases} \qquad (4)$$