Легко проверить это утверждение, если учесть, что

$$\frac{2}{2n+1}\sum_{j=0}^{2n} \cos kx_j \cos lx_j = \delta_{kl},$$

$$\frac{2}{2n+1}\sum_{j=0}^{2n} \sin kx_j \sin lx_j = \delta_{kl},$$

$$\frac{2}{2n+1}\sum_{j=0}^{2n} \sin kx_j \cos lx_j = 0 \quad (k, l = 0, 1, \ldots, n).$$

§ 15.3. Формулы для остатка ряда Фурье

Для функции $f \in L'^*$ (вообще L^*) из формул (4) и (5) предыдущего параграфа следует, что

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} D_n(u)\,[f(x+u) - f(x)]\,du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u)\,\Delta_u f(x)\,du, \tag{1}$$

где

$$\Delta_u f(x) = f(x+u) - f(x) \tag{2}$$

(разность f в точке x с шагом u).

В этих преобразованиях мы воспользовались периодичностью подынтегральной функции.

Равенство (1) дает выражение для остаточного члена ряда Фурье. Выяснение вопроса, сходится или нет ряд Фурье функции f в данной точке x к ее значению $f(x)$, и связанные с этим вопросом оценки сходимости сводятся к исследованию поведения интеграла (1) при $n \to \infty$.

Зададим положительное число η, удовлетворяющее неравенствам $0 < \eta \leqslant \pi$, и введем для удобства две функции

$$\mu(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{u}, & |u| < \eta, \\ 0, & \eta \leqslant |u| \leqslant \pi, \end{cases} \tag{3}$$

$$\nu(u) = \begin{cases} 0, & |u| < \eta, \\ \dfrac{1}{u}, & \eta \leqslant |u| \leqslant \pi. \end{cases} \tag{4}$$

Очевидно, $\frac{1}{u} = \mu(u) + \nu(u)$, $-\pi < u < \pi$, поэтому

$$D_n(u) = \frac{\sin nu}{2\operatorname{tg}\frac{u}{2}} + \frac{1}{2}\cos nu = \frac{\sin nu}{u} + \left(\frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{u}{2}} - \frac{1}{u}\right)\sin nu + \\ + \frac{1}{2}\cos nu = \mu(u)\sin nu + g(u)\sin nu + \frac{1}{2}\cos nu, \quad (5)$$

где $g(u) = \nu(u) + \frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{u}{2}} - \frac{1}{u}$.

Отметим неравенства

$$|g(u)| \leqslant \frac{1}{\eta} + \left|\frac{u - 2\operatorname{tg}\frac{u}{2}}{2u\operatorname{tg}\frac{u}{2}}\right| \leqslant \frac{1}{\eta} + \frac{O(u^2)}{2\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right|} \leqslant C$$
$$(-\pi < u < \pi),$$

показывающие, что функция $g(u)$ ограничена на $(-\pi, \pi)$. Кроме того, она принадлежит, очевидно, к $L'(-\pi, \pi)$. Мы будем считать ее продолженной с периодом 2π на всю действительную ось. Таким образом, $g(u) \in L'_*$ и ограниченная функция.

Из (1) и (2) следует равенство

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\eta}^{\eta} \frac{\sin nu}{u}\Delta_u f(x)\,du + \rho_n(x), \quad (6)$$

где

$$\rho_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(u)\sin nu\Delta_u f(x)\,du + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nu\Delta_u f(x)\,du. \quad (7)$$

В § 15.4 (замечание 3) будет показано, что *если функция* $f \in L'_*$, *то*

$$\rho_n(x) = o(1), \quad n \to \infty \quad (8)$$

для любого x, *где* $f(x)$ *конечна и даже равномерно на любом отрезке* $[a, b]$, *где функция* $f(x)$ *ограничена.*

Но тогда справедлива следующая важная лемма.

Лемма. *Если функция* $f \in L'_*$ *и* η — *произвольное число, удовлетворяющее неравенствам* $0 < \eta \leqslant \pi$, то

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\eta}^{\eta}\frac{\sin nu}{u}\Delta_u f(x)\,du + o(1) \quad (n \to \infty) \quad (9)$$

(см. (2)) *для любого x, где $f(x)$ конечна, и притом равномерно на любом отрезке $[a, b]$, где функция $f(x)$ ограничена.*

Для фиксированной точки x формула (9) всегда верна, лишь бы функция f была определена в этой точке. Для того чтобы узнать, стремится ли при $n \to \infty$ к нулю разность $S_n(x) - f(x)$ в этой точке, мы должны исследовать первый (главный) член в правой части (9). Второй член уже стремится к нулю.

Если известно, что на некотором отрезке $[a, b]$ наша функция f ограничена, то вопрос о том, будет ли $S_n(x)$ стремиться к $f(x)$ при $n \to \infty$ на этом отрезке или его части равномерно, зависит от решения этого вопроса для главного члена части (9), потому что второй член уже стремится к нулю и притом равномерно на $[a, b]$.

Конечно, если функция f неограничена на отрезке $[a, b]$, то она разрывна где-то на нем и ряд Фурье f, если и сходится на $[a, b]$ к f, то заведомо неравномерно. Ведь его члены — равномерно непрерывные на $(-\infty, \infty)$ функции.

Остановимся еще на важном свойстве рядов Фурье, называемом *принципом локализации. Если мы хотим узнать, сходится или нет ряд Фурье данной функции $f \in L'^*(L^*)$ на отрезке $[a', b']$, достаточно знать ее свойства на каком-нибудь отрезке $[a, b]$, строго внутри себя содержащем $[a', b']$.* В самом деле, положим $\eta = \min\{a' - a, b - b'\}$. Тогда для точек $x \in [a', b']$, для которых мы хотим исследовать сходимость ряда Фурье, подынтегральное выражение в правой части (9) зависит от значений f только на $[a, b]$ (ведь если $x \in [a', b']$ и $0 < |u| < \eta$, то x, $x + u$, $x - u \in [a, b]$).

§ 15.4. Леммы об осцилляции

Пусть функция $f \in L'(-\infty, \infty)$ (вообще $L(-\infty, \infty)$), тогда при любом действительном λ

$$\begin{aligned} \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\lambda x\,dx\right| &\leqslant \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right) - f(x)\right|dx, \\ \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\lambda x\,dx\right| &\leqslant \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right) - f(x)\right|dx. \end{aligned} \tag{1}$$

В самом деле,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\lambda x\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(u+\frac{\pi}{\lambda}\right)\sin\lambda\left(u+\frac{\pi}{\lambda}\right)du =$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} f\left(u+\frac{\pi}{\lambda}\right)\sin\lambda u\,du = -\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right)\sin\lambda x\,dx.$$