(см. (2)) *для любого* x, *где* $f(x)$ *конечна, и притом равномерно на любом отрезке* $[a, b]$, *где функция* $f(x)$ *ограничена.*

Для фиксированной точки x формула (9) всегда верна, лишь бы функция f была определена в этой точке. Для того чтобы узнать, стремится ли при $n \to \infty$ к нулю разность $S_n(x) - f(x)$ в этой точке, мы должны исследовать первый (главный) член в правой части (9). Второй член уже стремится к нулю.

Если известно, что на некотором отрезке $[a, b]$ наша функция f ограничена, то вопрос о том, будет ли $S_n(x)$ стремиться к $f(x)$ при $n \to \infty$ на этом отрезке или его части равномерно, зависит от решения этого вопроса для главного члена части (9), потому что второй член уже стремится к нулю и притом равномерно на $[a, b]$.

Конечно, если функция f неограничена на отрезке $[a, b]$, то она разрывна где-то на нем и ряд Фурье f, если и сходится на $[a, b]$ к f, то заведомо неравномерно. Ведь его члены — равномерно непрерывные на $(-\infty, \infty)$ функции.

Остановимся еще на важном свойстве рядов Фурье, называемом *принципом локализации. Если мы хотим узнать, сходится или нет ряд Фурье данной функции* $f \in L'^*(L^*)$ *на отрезке* $[a', b']$, *достаточно знать ее свойства на каком-нибудь отрезке* $[a, b]$, *строго внутри себя содержащем* $[a', b']$. В самом деле, положим $\eta = \min\{a' - a, b - b'\}$. Тогда для точек $x \in [a', b']$, для которых мы хотим исследовать сходимость ряда Фурье, подынтегральное выражение в правой части (9) зависит от значений f только на $[a, b]$ (ведь если $x \in [a', b']$ и $0 < |u| < \eta$, то x, $x + u$, $x - u \in [a, b]$).

§ 15.4. Леммы об осцилляции

Пусть функция $f \in L'(-\infty, \infty)$ (вообще $L(-\infty, \infty)$), тогда при любом действительном λ

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\lambda x\,dx\right| \leqslant \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) - f(x)\right| dx,$$
$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\lambda x\,dx\right| \leqslant \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) - f(x)\right| dx. \tag{1}$$

В самом деле,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\lambda x\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(u + \frac{\pi}{\lambda}\right)\sin\lambda\left(u + \frac{\pi}{\lambda}\right) du =$$
$$= -\int_{-\infty}^{\infty} f\left(u + \frac{\pi}{\lambda}\right)\sin\lambda u\,du = -\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right)\sin\lambda x\,dx.$$

Поэтому

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\lambda x\,dx\right| = \frac{1}{2}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left[f(x) - f\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right)\right]\sin\lambda x\,dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right) - f(x)\right|dx.$$

Для косинуса рассуждение аналогично.

Лемма 1. *Пусть* $f \in L'(-\infty, \infty)$ (*или* $L(-\infty, \infty)$), g — *ограниченная измеримая* (*на любом отрезке*) *функция* ($|g(x)| < k$). *Тогда*

$$\begin{aligned} &\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\lambda u\, g(u) f(x+u)\,du = 0, \\ &\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sin\lambda u\, g(u) f(x+u)\,du = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

равномерно относительно x, *принадлежащих к любому отрезку* $[a, b]$.

В частности,

$$\begin{aligned} &\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\lambda u f(x+u)\,du = 0, \\ &\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sin\lambda u f(x+u)\,du = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Доказательство. Отметим, что равенства (3) непосредственно следуют из неравенств (1) и теоремы 6 § 14.4.

Чтобы доказать (2), зададим $\varepsilon > 0$ и подберем непрерывную финитную функцию $\varphi(u) \in L'(-\infty, \infty)$ такую, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(u) - \varphi(u)|\,du < \frac{\varepsilon}{2K} \tag{4}$$

(см. теорему 1, § 14.4 и рис. 14.1, *а*) и представим интеграл (2) в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cos\lambda u\, g(u) f(x+u)\,du = I_1 + I_2, \tag{5}$$

где

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty}\cos\lambda u\, g(u)\,[f(x+u) - \varphi(x+u)]\,du,$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty}\cos\lambda u\, g(u)\,\varphi(x+u)\,du.$$

Но если считать, что $|g(u)| < K$, $|\varphi(u)| < K_1$, то для всех x

$$|I_1| \leqslant K \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+u) - \varphi(x+u)|\, du = K \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - \varphi(t)|\, dt < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{6}$$

и (в силу (1)) при $\lambda > \lambda_0$, где λ_0 достаточно велико,

$$|I_2| \leqslant \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| g\left(u + \frac{\pi}{\lambda}\right) \varphi\left(x + u + \frac{\pi}{\lambda}\right) - g(u)\varphi(x+u) \right| du \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| g\left(u + \frac{\pi}{\lambda}\right) - g(u) \right| \left| \varphi\left(x + u + \frac{\pi}{\lambda}\right) \right| du +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |g(u)| \left| \varphi\left(x + u + \frac{\pi}{\lambda}\right) - \varphi(x+u) \right| du \leqslant$$

$$\leqslant \frac{K_1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| g\left(u + \frac{\pi}{\lambda}\right) - g(u) \right| du + \frac{K}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \varphi\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) - \varphi(t) \right| dt < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{7}$$

Из (5), (6), (7) следует первое равенство (2) и притом равномерно относительно $x \in [a, b]$.

Аналогично доказывается второе равенство (2).

Лемма 2. *Равенства* (2) *остаются верными в предположении, что* $f \in L'(L)$, *а* $g(u) = g(\alpha, u)$ — *ограниченная функция* ($|g(\alpha, u)| < K$, $\alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2$), *непрерывно зависящая от* (α, u), *где* α — *параметр. При этом они выполняются равномерно относительно* $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2)$ *и* $x \in [a, b]$, *где* $[a, b]$ — *произвольный отрезок.*

Лемма эта доказывается так же, как лемма 1. Надо учесть, что в правой части (7) для $x \in [a, b]$ в силу финитности φ можно вместо интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} \left| g\left(u + \frac{\pi}{\lambda}\right) - g(u) \right| du$ написать $\int_{-N}^{N} \left| g\left(u + \frac{\pi}{\lambda}\right) - g(u) \right| du$ при достаточно большом N, и тогда

$$\int_{-N}^{N} \left| g\left(\alpha, u + \frac{\pi}{\lambda}\right) - g(\alpha, u) \right| du \to 0 \quad (\lambda \to \infty)$$

равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$, так как функция $g(\alpha, u)$ равномерно непрерывна на $[\alpha_1, \alpha_2] \times [-N, N]$.

Замечание 1. Все утверждения, доказанные выше в этом параграфе, остаются верными, если считать, что функции f и g — периодические периода 2π, принадлежащие L'_*, (или L_*), а интегралы взяты по периоду. Теперь уже, впрочем, надо считать, что переменная λ пробегает натуральные числа ($\lambda = 1, 2, 3, \ldots$), чтобы функции $\cos\lambda x$, $\sin\lambda x$ были периодическими. Конечно, функцию φ в (4) можно взять периодической периода 2π (не обязательно финитной на периоде).

Ниже формулируются эти утверждения для периодических функций. В верности их читатель убедится, заменив всюду в приведенных выше рассуждениях $\int\limits_{-\infty}^{\infty}$ на $\int\limits_{-\pi}^{\pi}$.

Для функции $f \in L'_*$ выполняются неравенства

$$\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \begin{matrix}\cos\lambda x\\ \sin\lambda x\end{matrix}\, dx\right| \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right)-f(x)\right| dx. \tag{1'}$$

Лемма 1'. *Пусть $f, g \in L'_*$ (или L_*) и, кроме того, g ограничена и измерима на $[-\pi, \pi]$. Тогда*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\begin{matrix}\cos\lambda u\\ \sin\lambda u\end{matrix}\, g(u) f(x+u)\, du = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots) \tag{2'}$$

равномерно относительно всех $x \in (-\infty, \infty)$.

В частности, коэффициенты Фурье a_k, b_k функции f стремятся к нулю при $k \to \infty$:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\, dt = 0,$$

$$\lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\, dt = 0.$$

Замечание 2. Верен также аналог леммы 2, где надо считать, что функция $g(\alpha, u)$ принадлежит по u к L'_* (L) и непрерывна по (α, u), где $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$.

Замечание 3. Равенство (8) § 15.3 теперь вытекает из следующих соображений.

Представим первое слагаемое правой части (7) § 15.3 подробнее:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(u)\sin nu\Delta_u f(x)\, du = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(u)\sin nu f(x+u)\, du - \\ - \frac{f(x)}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(u)\sin nu\, du. \tag{8}$$

Первый интеграл правой части (8) стремится к нулю при $n \to \infty$ равномерно относительно $x \in (-\infty, \infty)$ на основании (2'). Второй интеграл на том же основании стремится к нулю для таких x, для которых $f(x)$ — конечное число; при этом это стремление к нулю равномерно на любом отрезке изменения x, на котором функция f ограничена. Аналогичные утверждения имеют место и для второго слагаемого правой части (7) § 15.3.

Этим доказано, *что $\rho_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$ для любого x, для которого $f(x)$ конечна и притом равномерно на любом отрезке, на котором f ограничена.*

Заметим еще, что если функция $f \in L_2'^*$ (или L_2^*), то тот факт, что ее коэффициенты Фурье a_k, b_k стремятся к нулю, следует из неравенства Парсеваля

$$\sum_1^\infty (|a_k|^2 + |b_k|^2) < \infty.$$

Стремление к нулю интеграла (3), соответствующего, например синусу, можно объяснить следующим образом. Несмотря на то, что функция $f \in L'^*(L^*)$ может иметь много, даже (в случае L) бесконечное число разрывов, она все же обладает многими свойствами непрерывных функций. Это проявляется в доказанных выше леммах об осцилляции. Множитель $\sin \lambda x$ изгибает график $f(x)$ в график, состоящий из волн. Каждая из них состоит из двух полуволн, которые в среднем хорошо компенсируют друг друга при интегрировании. Результат компенсации налицо: интеграл (3) стремится к нулю при $\lambda \to \infty$.

§ 15.5. Критерии сходимости рядов Фурье. Полнота тригонометрической системы функций

По определению функция $f(x)$ удовлетворяет на отрезке $[a, b]$ (интервале (a, b)), *условию Липшица степени* α $(0 < \alpha \leqslant 1)$, если для любых $x, x' \in [a, b]$ $((a, b))$ выполняется неравенство

$$|f(x') - f(x)| \leqslant M|x' - x|^\alpha,$$

где M не зависит от x, x'. При $\alpha = 1$ в этом случае просто говорят, что *f удовлетворяет условию Липшица.*

Если, например, f — непрерывная и кусочно гладкая на $[a, b]$, то она удовлетворяет условию Липшица на $[a, b]$, потому что

$$|f(x') - f(x)| = \left| \int_x^{x'} f'(t)\,dt \right| \leqslant M|x' - x| \quad (|f'(t)| \leqslant M).$$

Если функция f имеет на интервале (a, b) ограниченную производную $(|f'| \leqslant M)$ и непрерывна на $[a, b]$, то и в этом случае