Первый интеграл правой части (8) стремится к нулю при $n \to \infty$ равномерно относительно $x \in (-\infty, \infty)$ на основании (2'). Второй интеграл на том же основании стремится к нулю для таких x, для которых $f(x)$ — конечное число; при этом это стремление к нулю равномерно на любом отрезке изменения x, на котором функция f ограничена. Аналогичные утверждения имеют место и для второго слагаемого правой части (7) § 15.3.

Этим доказано, *что $\rho_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$ для любого x, для которого $f(x)$ конечна и притом равномерно на любом отрезке, на котором f ограничена.*

Заметим еще, что если функция $f \in L_2'^*$ (или L_2^*), то тот факт, что ее коэффициенты Фурье a_k, b_k стремятся к нулю, следует из неравенства Парсеваля

$$\sum_1^\infty (|a_k|^2 + |b_k|^2) < \infty.$$

Стремление к нулю интеграла (3), соответствующего, например синусу, можно объяснить следующим образом. Несмотря на то, что функция $f \in L'^*(L^*)$ может иметь много, даже (в случае L) бесконечное число разрывов, она все же обладает многими свойствами непрерывных функций. Это проявляется в доказанных выше леммах об осцилляции. Множитель $\sin \lambda x$ изгибает график $f(x)$ в график, состоящий из волн. Каждая из них состоит из двух полуволн, которые в среднем хорошо компенсируют друг друга при интегрировании. Результат компенсации налицо: интеграл (3) стремится к нулю при $\lambda \to \infty$.

§ 15.5. Критерии сходимости рядов Фурье. Полнота тригонометрической системы функций

По определению функция $f(x)$ удовлетворяет на отрезке $[a, b]$ (интервале (a, b)), *условию Липшица степени* α $(0 < \alpha \leqslant 1)$, если для любых $x, x' \in [a, b]$ ((a, b)) выполняется неравенство

$$|f(x') - f(x)| \leqslant M|x' - x|^\alpha,$$

где M не зависит от x, x'. При $\alpha = 1$ в этом случае просто говорят, что *f удовлетворяет условию Липшица.*

Если, например, f — непрерывная и кусочно гладкая на $[a, b]$, то она удовлетворяет условию Липшица на $[a, b]$, потому что

$$|f(x') - f(x)| = \left|\int_x^{x'} f'(t)\,dt\right| \leqslant M|x' - x| \quad (|f'(t)| \leqslant M).$$

Если функция f имеет на интервале (a, b) ограниченную производную $(|f'| \leqslant M)$ и непрерывна на $[a, b]$, то и в этом случае мы, применяя теорему Лагранжа, получим

$$|f(x')-f(x)| = |f'(\xi)(x'-x)| \leqslant M|x'-x|, \quad \xi \in (x, x')$$

и убедимся, что f удовлетворяет на $[a, b]$ условию Липшица.

Функция $|x|^\alpha$ $(0<\alpha\leqslant 1)$ удовлетворяет условию Липшица степени α на всей действительной оси (тем более на любом отрезке), потому что, если считать, что $0<|x|<|x'|$ и $|x'/x|=t$, $1<t<\infty$, то получим

$$\frac{||x'|^\alpha-|x|^\alpha|}{|x'-x|^\alpha} \leqslant \frac{||x'|^\alpha-|x|^\alpha|}{||x'|-|x||^\alpha} = \frac{t^\alpha-1}{(t-1)^\alpha} \leqslant 1 \qquad (M=1).$$

При $\alpha=1$ это неравенство очевидно. При $\alpha<1$ это видно из того, что функция от t в его левой части имеет предел, равный нулю при $t\to 1$ и равный 1 при $t\to\infty$, и она имеет положительную производную на $(1, \infty)$ и, таким образом, она возрастает на $(1, \infty)$*).

Теорема 1. *Пусть функция $f\in L'^*$ (или L^*) и, кроме того, она удовлетворяет условию Липшица степени α на отрезке $[a, b]$ (в частности, если f — непрерывная кусочно гладкая на $[a, b]$). Тогда, каковы бы ни были a', b', удовлетворяющие неравенствам $a<a'<b'<b$, ряд Фурье f сходится на $[a', b']$ к f и притом равномерно.*

Доказательство. Пусть $\delta=\min\{a'-a, b-b'\}$ и $0<\eta<\delta$, π. Тогда для $x\in[a', b']$ и $0\leqslant|u|\leqslant\eta$ точки x, $x+u$ принадлежат $[a, b]$ и потому

$$|f(x+u)-f(x)| \leqslant M|u|^\alpha. \tag{1}$$

При найденном η воспользуемся формулой § 15.3, (9):

$$S_n(x)-f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\eta}^{\eta} \sin nu\,\frac{f(x+u)-f(x)}{u}\,du + o(1), \qquad n\to\infty$$

имеющей место равномерно относительно $x\in[a, b]$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ равномерно для всех $x\in[a', b']$ получим в силу (1) оценку

$$|S_n(x)-f(x)| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\eta}^{\eta}\frac{M|u|^\alpha}{|u|}\,du + |o(1)| \leqslant \frac{2M}{\pi\alpha}\eta^\alpha + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

$$(n>N). \tag{2}$$

где η выбрано так, чтобы выполнялось неравенство $2M\eta^\alpha/\pi\alpha < \varepsilon/2$ и затем N взято настолько большим, чтобы $|o(1)|<\frac{\varepsilon}{2}$ при $n>N$. Теорема доказана.

---

*) В случае $|x|=|x'|$ имеем $|x'|^\alpha-|x|^\alpha=0\leqslant|x'-x|^\alpha$.

Теорема 2. *Если функция $f \in C^*$ — непрерывная и кусочно гладкая на действительной оси, то ее ряд Фурье сходится к ней на всей действительной оси и притом равномерно.*

В самом деле, на отрезке $[-\varepsilon, 2\pi+\varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$, f — непрерывная и кусочно гладкая и потому ряд ее Фурье по предыдущей теореме равномерно сходится к ней на $[0, 2\pi]$, следовательно, вследствие периодичности f и членов ряда, и на всей действительной оси.

Теорема 3 (Вейерштрасса). *Системы функций*

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \tag{3}$$

$$1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \tag{4}$$

$$\sin x, \sin 2x, \ldots, \tag{5}$$

полны соответственно

1) *в пространстве C^*,*

2) *в подпространстве C^* четных функций, а также в $C(0, \pi)$,*

3) *в подпространстве C^* нечетных функций, а также в классе функций, принадлежащих $C(0, \pi)$ и удовлетворяющих условию $f(0) = f(\pi) = 0$.*

Доказательство. В самом деле, пусть f — произвольная функция класса C^*. Она равномерно непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и имеет период 2π. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ можно указать полигональную функцию $\Pi(x)$ периода 2π такую, что

$$|f(x) - \Pi(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{6}$$

для всех x. При этом, если f — четная или нечетная функция, то можно сделать так, что и $\Pi(x)$ будет соответственно четная или нечетная. Например, если точки графика f с абсциссами $x_j = jh$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, h = \pi/N$, где N — достаточно большое натуральное число, соединить отрезками, то получим ломаную, описываемую нужной функцией $\Pi(x)$. Функция $\Pi(x)$ удовлетворяет условиям предыдущей теоремы и потому n-я ее сумма Фурье при достаточно большом n удовлетворяет неравенству

$$|\Pi(x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ для всех } x. \tag{7}$$

При этом, если $\Pi(x)$ — четная или нечетная функция, то и $S_n(x)$ соответственно обладает одним из этих свойств.

Из (6) и (7) следует, что $|f(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ для всех x. Это доказывает теорему, потому что $S_n(x)$ — тригонометрический полином — конечная линейная комбинация из функций соответственно систем (3), (4), (5). Отметим, что S_n есть сумма Фурье не f, а Π.

Это утверждение не противоречит тому факту, что существуют функции $f \in C^*$, ряды Фурье которых в отдельных точках расходятся (см. по этому поводу замечание в конце этого параграфа).

Надо еще иметь в виду, что если непрерывную на $[0, \pi]$ (принадлежащую $C(0, \pi)$) функцию продолжить четным образом, а затем периодически с периодом 2π продолжить на действительную ось, то получим четную функцию класса C^*. Если же функцию, непрерывную на $[0, \pi]$, удовлетворяющую условию $f(0) = f(\pi) = 0$, продолжить нечетным образом, а затем периодически, то получим нечетную функцию класса C^*.

Заметим, что из теоремы 3 следует, что *для любой непрерывной периода 2π функции f $(f \in C^*)$ существует равномерно сходящаяся к ней (на действительной оси) последовательность тригонометрических полиномов $T_n(x)$* $(n = 1, 2, \ldots)$, откуда следует, что *функция f представима в виде равномерно сходящегося к ней ряда тригонометрических полиномов*

$$f(x) = \sum_0^\infty Q_k(x), \quad Q_0 = T_0, \quad Q_k = T_k - T_{k-1} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Теорема 4. *Ряд Фурье функции $f \in L_2'^*$ $\left(\text{вообще } L_2^*\right)$ сходится к ней в смысле среднего квадратичного на периоде.*

Доказательство. В самом деле, по предыдущей теореме система (3) тригонометрических функций полна в C^*. Тем более она полна в $L_2'^*$ (см. теорему § 14.9). Но тогда теорема верна на основании теоремы 1 § 14.6 из общей теории ортогональных рядов.

В силу той же теоремы для полной ортогональной и нормальмальной системы тригонометрических функций § 15.1, (1) выполняется равенство Парсеваля

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f\,dx\right|^2 + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^\infty\left(\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt\right|^2 + \left|\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt\right|^2\right),$$

или

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2\,dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^\infty (|a_k|^2 + |b_k|^2), \tag{8}$$

какова бы ни была функция $f \in L_2'^*$ (или, более общо, L_2^*).

Пример 1. Функция $\psi(x)$ периода 2π, определяемая равенством *)

$$\psi(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi-x}{2}, & 0<x<2\pi,\\ 0, & x=0,\end{cases} \tag{9}$$

очевидно, принадлежит L'^*. Ее ряд Фурье имеет вид

$$\psi(x)=\sum_1^\infty \frac{\sin kx}{k}, \tag{10}$$

потому что она нечетная, а

$$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\pi-t}{2}\sin kt\,dt=\frac{1}{k}\quad (k=1,2,\ldots).$$

Любой отрезок $[a', b']$, не содержащий в себе точки $x_k=2k\pi$ $(k=0, \pm1, \pm2, \ldots)$, содержится строго внутри некоторого другого отрезка $[a, b]$ $(a<a'<b'<b)$, обладающего этим же свойством, и при этом на $[a, b]$ функция ψ непрерывна вместе со своей производной, следовательно,— гладкая. Но тогда на основании теоремы 1 ряд Фурье (10) функции ψ сходится к ней равномерно на $[a', b']$. Он, таким образом, сходится в любой точке $x\neq 2k\pi$ $(k=0, \pm1, \pm2, \ldots)$. Но и в этих исключительных точках $2k\pi$ он тоже сходится к ψ, ведь в них $\psi=0$, так же как равны нулю все члены ряда (10). Однако равномерной сходимости в любых окрестностях точек $x_k=2k\pi$ не может быть.

Кроме того, очевидно, что $\psi\in L_2'^*$, и потому на основании теоремы 4 ряд Фурье (10) функции ψ сходится к ψ в смысле среднего квадратического на $[-\pi, \pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\psi(x)-\sum_1^n\frac{\sin kx}{k}\right|^2 dx\to 0\quad (n\to\infty).$$

Функция $\psi(x)$ представляет собой простейшую разрывную периода 2π функцию, имеющую единственную точку разрыва (на периоде) первого рода. Ее скачок в точке разрыва равен $\psi(0+0)-\psi(0-0)=\pi$.

Очевидно, функция $\psi(x-x_0)$, график которой сдвинут на величину x_0 в направлении оси x, имеет разрывы в точках $x_0+2k\pi$ $(k=0, \pm1, \pm2, \ldots)$ со скачками, равными π. Она разлагается в тригонометрический ряд

$$\psi(x-x_0)=\sum_1^\infty\frac{\sin k(x-x_0)}{k}=\sum_1^\infty\left(\frac{(-\sin kx_0)}{k}\cos kx+\frac{\cos kx_0}{k}\sin kx\right),$$

который является ее рядом Фурье, потому что он сходится в смысле среднего квадратичного к $\psi(x-x_0)$ на $(0, 2\pi)$ (см. следствие леммы 1 § 14.6).

---

*) Функция $\psi(x)$ и функция $S(x)$, о которой говорилось в § 15.1 (см. § 15.1, (11)), связаны равенством $-\psi(x)=\frac{1}{2}S(x-\pi)$, поэтому графики $-\psi$ и $\frac{1}{2}S$ и их частных сумм Фурье получаются один из другого сдвигом на π.

Замечание. Функция ψ дает нам интересный пример функции, ряд Фурье которой сходится к ней не только в ее точках непрерывности, но и в ее точках разрыва.

Следующая теорема дает общий класс функций, ряды Фурье которых сходятся к ним в их точках разрыва.

Теорема 5. *Пусть функция $f \in L'^*$ (L^*) — кусочно гладкая на отрезке $[a, b]$ и имеет на этом отрезке единственную точку разрыва $x \subset (a, b)$. Тогда ряд Фурье f сходится в точке x_0 к среднему арифметическому правого и левого пределов в этой точке:*

$$\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (a_k \cos kx_0 + b_k \sin kx_0). \qquad (11)$$

Доказательство. Так как f — кусочно гладкая на отрезке $[a, b]$ функция и точка x_0 — внутренняя точка этого отрезка, то конечные пределы $f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$ существуют. Будем считать, что выполняется равенство

$$f(x_0) = \frac{1}{2}[f(x_0-0)+f(x_0+0)].$$

Иначе можно видоизменить f в x_0 так, чтобы это равенство выполнилось, что, как мы знаем, не изменяет коэффициенты Фурье функции f, а следовательно, и ее ряд Фурье.

Положим

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(x_0+0)-f(x_0-0)}{\pi}\psi(x-x_0).$$

На основании свойств функции ψ

$$\varphi(x_0) = f(x_0),$$

$$\varphi(x_0+0) = f(x_0+0) - \frac{f(x_0+0)-f(x_0-0)}{2} = \frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2} = f(x_0),$$

$$\varphi(x_0-0) = f(x_0-0) + \frac{f(x_0+0)-f(x_0-0)}{2} = \frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2} = f(x_0).$$

Поэтому $\varphi(x_0) = \varphi(x_0-0) = \varphi(x_0+0)$. Это показывает, что функция φ непрерывна в точке x_0, и так как она есть разность кусочно гладких на $[a, b]$ функций, непрерывных вне точки x_0, то она кусочно гладкая и непрерывная на $[a, b]$, но тогда, как мы знаем, n-я сумма $S_n(\varphi, x_0)$ функции φ в точке x_0 стремится при $n \to \infty$ к $\varphi(x_0)$ и так как $S_n(f, x_0) = S_n(\varphi, x_0)$, то

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f, x_0) = \lim_{n\to\infty} S_n(\varphi, x_0) = \varphi(x_0) = f(x_0),$$

что и требовалось доказать.

Ряд Фурье функции f, описанной в теореме 5 со скачком в точке $x = x^0$, хотя и сходится в этой точке и ее окрестности, но медленно и притом неравномерно. Ряд же Фурье $\varphi(x)$ сходится лучше и уже во всяком случае равномерно в некоторой окрестности x^0. С другой стороны, функция $\alpha\psi(x - x_0)$ выражается очень простой формулой, и быть может, даже не будет необходимости разлагать ее в ряд Фурье. Во всяком случае, ряд Фурье функции ψ очень хорошо изучен в специальной литературе.

Отметим некоторые факты, относящиеся к вопросу о сходимости и расходимости рядов Фурье.

А. Н. Колмогоров *) привел пример функции, принадлежащей лебегову классу L^*, ряд Фурье которой расходится всюду на действительной оси.

Карлсон **) показал, что какова бы ни была функция, принадлежащая лебегову классу L_2^*, ее ряд Фурье сходится к ней почти всюду. Так как $C^* \subset L_2^*$, то это утверждение Карлсона имеет место и для всякой непрерывной на действительной оси функции периода 2π. Утверждение Карлсона верно и для функций $f \in L_p^* (1 < p < \infty)$***).

С другой стороны, известны (Дюбуа Реймон, Фейер) примеры непрерывных периодических функций $f (f \in C^*)$, ряды Фурье которых расходятся на множестве всех рациональных точек. Они показывают, что если про функцию f известно только, что она непрерывна, то этого не достаточно, чтобы сказать, что ее ряд Фурье сходится. Для сходимости нужно наложить на f еще некоторые добавочные условия. В доказанных выше теоремах таким добавочным условием было условие Липшица степени α. В других более изысканных теориях это условие заменяется на более слабые достаточные признаки.

Полученные выше свойства рядов Фурье функций периода 2π автоматически переносятся на ряды функций периода 2ω:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi}{\omega} x + b_k \sin \frac{k\pi}{\omega} x \right), \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\omega} \int_0^{2\omega} \cos \frac{k\pi}{\omega} t f(t)\, dt, \\ b_k &= \frac{1}{\omega} \int_0^{2\omega} \sin \frac{k\pi}{\omega} t f(t)\, dt. \end{aligned}\right. \tag{13}$$

*) А. Н. Колмогоров (родился в 1903 г.) — выдающийся советский математик, академик.

**) Карлсон Л. А. Е.— выдающийся современный шведский математик.

***) Это доказал американский математик Р. Хант.

Таким образом, если функция $f \in L'(0, 2\omega)$ ($L(0, 2\omega)$) периода 2ω и удовлетворяет на отрезке $[a, b]$ условию Липшица степени α $(0 < \alpha \leqslant 1)$, то ее ряд Фурье (13) сходится к ней равномерно на любом отрезке $[a', b'] \subset (a, b)$, если же f — кусочно гладкая на $[a, b]$, то в точках x ее разрыва, принадлежащих (a, b), ее ряд Фурье сходится к $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$.

Наконец, заметим, что если функция $y = f(x)$ описывает физическое колебание, представляющее собой сумму конечного или бесконечного числа некоторых гармонических колебаний, соответствующих частотам $k = 0, \pm 1, \ldots$, то k-е колебание $u_k(x) = a_k \cos \frac{k\pi}{\omega} x + b_k \sin \frac{k\pi}{\omega} x$ можно легко получить, учитывая, что числа a_k, b_k суть коэффициенты Фурье f, вычисляемые по формулам (13). С другой стороны, эти колебания $u_k(x)$ можно, как известно, физически получить из данного сложного реального колебания $y = f(x)$ при помощи специальных физических приспособлений — резонаторов, и при этом соответствующие практические результаты хорошо согласуются с математическими.

Примеры. Приведенные здесь функции имеют период 2π.

1. $f_1(x) = \operatorname{sign} x \ (|x| < \pi)$, $\quad f_1(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$.

2. $f_2(x) = x \ (|x| < \pi)$, $\quad f_2(x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \sin kx}{k}$.

3. $f_3(x)$ — четная функция, равная $\frac{\pi - x}{2}$ на $[0, \pi]$,

$$f_3(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \sum_{0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}.$$

4. $f_4(x)$ — четная функция, равная 1 в $(0, h)$ и равная нулю в (h, π), $0 < h < \pi$,

$$f_4(x) = \frac{2h}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sin kh}{kh} \right) \cos kx \right].$$

5. $f_5(x)$ — непрерывная четная функция, равная нулю в $(2h, \pi)$, $0 < h \leqslant \pi/2$, равная 1 при $x = 0$ и линейная в $(0, 2h)$,

$$f_5(x) = \frac{2h}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sin kh}{kh} \right)^2 \cos kx \right].$$

Упражнение. Выяснить, на каких отрезках или, может быть, на всей действительной оси сходятся равномерно ряды из примеров 1—5.