## § 15.6. Комплексная форма записи ряда Фурье

Пусть $a_k$ и $b_k$ — коэффициенты Фурье функции $f \in L'^*$ (или $L^*$). На основании формулы Эйлера

$$a_k \cos kx + b_k \sin kx = a_k \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} + b_k \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} = c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx},$$

где

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}. \tag{1}$$

Отсюда

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos kt - i \sin kt) f(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt,$$

$$c_{-k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos kt + i \sin kt) f(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{ikt} dt$$

и, таким образом, числа

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{2}$$

вычисляются по единой формуле для всех $k$ (в том числе и $k = 0$, $c_0 = a_0/2$).

Важно заметить, что если $f$ — действительная функция, то $a_k$ и $b_k$ действительны, а числа $c_k$ и $c_{-k}$, хотя вообще и комплексны, но взаимно сопряжены:

$$c_{-k} = \bar{c}_k. \tag{3}$$

Наоборот, попарная комплексная сопряженность $c_k$ и $c_{-k}$ влечет за собой, очевидно, действительность коэффициентов Фурье $a_k$ и $b_k$ функции $f$, а если это имеет место для всех $k = 0, 1, \ldots$, то и действительность $f$.

В самом деле, если, например, $f \in L_2'^*$, то ряд Фурье $f$ сходится к $f$ в смысле среднего квадратического. Но если его члены действительны, то и $f(x)$ — действительная функция. В общем случае $f \in L'^*$, этот факт следует из теоремы 2 § 15.11.

Очевидно, $n$-я сумма ряда Фурье $f$ может быть записана в виде

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{-n}^n c_k e^{ikx}, \tag{4}$$

а сам ряд Фурье $f$ — в виде ряда

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \sim \sum_{-\infty}^\infty c_k e^{ikx} \tag{5}$$

с двумя входами.

Мы будем говорить, что ряд (5) сходится для данного значения $x$, если существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{-n}^n c_k e^{ikx}$$

Таким образом, мы будем понимать сходимость ряда в правой части (5) в *смысле главного значения*. Ведь можно было бы считать его сходящимся, если существует предел

$$\lim_{n,m\to\infty} \sum_{-m}^n c_k e^{ikx},$$

когда $m$ и $n$ неограниченно возрастают независимо друг от друга.

Функции (комплексные!)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{6}$$

образуют ортогональную и нормальную систему на отрезке $[0, 2\pi]$, потому что

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ilx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k-l)x} dx = \delta_{kl}.$$

Так как тригонометрические функции $\cos kx$, $\sin kx$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) образуют полную систему в $C^*$, тем более в $L_2^*$, $L^*$ (теорема 3, § 15.5), то это же свойство имеет место и для системы $e^{ikx}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), потому что

$$\cos kx = \frac{1}{2}\left(e^{ikx} + e^{-ikx}\right), \quad \sin kx = \frac{1}{2i}\left(e^{ikx} - e^{-ikx}\right).$$

*Числа $c_k$, определяемые формулами* (2), *являются коэффициентами Фурье $f$ относительно функций $e^{ikx}$* (см. § 14.6(2)).

Из сказанного следует, что *ряд*

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^\infty c_k e^{ikx},$$

*полученный в* (5) *из обычного тригонометрического ряда Фурье, есть сам по себе ряд Фурье функции $f$ по функциям $e^{ikx}$. Его называют тригонометрическим рядом Фурье функции $f$ в комплексной форме.*

В силу полноты системы (6) в $L_2^*$ для любой функции $f \in L_2^*$ имеет место равенство Парсеваля

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx = \sum_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi} f(t)\,e^{ikt}dt\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi} f(t)\,e^{-ikt}dt\right)$$

или

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx = \sum_{-\infty}^{\infty}|c_k|^2. \tag{7}$$

## § 15.7. Дифференцирование и интегрирование рядов Фурье

Пусть $f(x)$ есть непрерывная кусочно гладкая функция *) периода $2\pi$. К ее ненулевым коэффициентам Фурье можно применить формулу интегрирования по частям:

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,e^{-ikt}dt = \frac{1}{2\pi}\left(f(t)\frac{e^{-ikt}}{-ik}\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{ik}\int_0^{2\pi} f'(t)\,e^{-ikt}dt\right) =$$

$$= \frac{1}{ik}c_k' \quad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{1}$$

где

$$c_k' = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)\,e^{-ikt}dt. \tag{2}$$

Мы воспользовались периодичностью функций $f(t)$ и $e^{ikt}$, в силу которой

$$f(t)\,e^{-ikt}\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Производная $f'(t)$ есть кусочно непрерывная периода $2\pi$ функция, возможно, разрывная с конечным числом разрывов первого рода на периоде. Она конечна, принадлежит $L'^*$ и для нее имеют смысл числа $c_k'$ — комплексные коэффициенты Фурье $f'$.

Если функция $f(x)$ периода $2\pi$ непрерывна и имеет непрерывную кусочно гладкую производную порядка $l-1$, то процесс (1) интегрирования по частям можно провести $l$ раз. В результате получим равенство

$$c_k = \frac{1}{(ik)^l}c_k^{(l)} \quad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{3}$$

где

$$c_k^{(l)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^{(l)}(t)\,e^{-ikt}dt$$

— коэффициенты Фурье $f^{(l)}(x)$ — производной от $f$ порядка $l$.

*) Или, более общо, пусть функция $f$ периода $2\pi$ абсолютно непрерывна на любом отрезке (см. § 19.5, (11)).