В силу полноты системы (6) в $L_2^*$ для любой функции $f \in L_2^*$ имеет место равенство Парсеваля

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx = \sum_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi} f(t)\,e^{ikt}dt\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi} f(t)\,e^{-ikt}dt\right)$$

или

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx = \sum_{-\infty}^{\infty} |c_k|^2. \tag{7}$$

## § 15.7. Дифференцирование и интегрирование рядов Фурье

Пусть $f(x)$ есть непрерывная кусочно гладкая функция *) периода $2\pi$. К ее ненулевым коэффициентам Фурье можно применить формулу интегрирования по частям:

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,e^{-ikt}dt = \frac{1}{2\pi}\left(f(t)\,\frac{e^{-ikt}}{-ik}\Bigg|_0^{2\pi} + \frac{1}{ik}\int_0^{2\pi} f'(t)\,e^{-ikt}dt\right) =$$
$$= \frac{1}{ik}\,c_k' \quad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{1}$$

где

$$c_k' = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)\,e^{-ikt}dt. \tag{2}$$

Мы воспользовались периодичностью функций $f(t)$ и $e^{ikt}$, в силу которой

$$f(t)\,e^{-ikt}\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Производная $f'(t)$ есть кусочно непрерывная периода $2\pi$ функция, возможно, разрывная с конечным числом разрывов первого рода на периоде. Она конечна, принадлежит $L'^*$ и для нее имеют смысл числа $c_k'$ — комплексные коэффициенты Фурье $f'$.

Если функция $f(x)$ периода $2\pi$ непрерывна и имеет непрерывную кусочно гладкую производную порядка $l-1$, то процесс (1) интегрирования по частям можно провести $l$ раз. В результате получим равенство

$$c_k = \frac{1}{(ik)^l}\,c_k^{(l)} \quad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{3}$$

где

$$c_k^{(l)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^{(l)}(t)\,e^{-ikt}dt$$

— коэффициенты Фурье $f^{(l)}(x)$ — производной от $f$ порядка $l$.

*) Или, более общо, пусть функция $f$ периода $2\pi$ абсолютно непрерывна на любом отрезке (см. § 19.5, (11)).

Имеет место важная теорема.

Теорема 1. *Если ряд Фурье непрерывной периода $2\pi$ кусочно гладкой функции* *)

$$f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \tag{4}$$

*почленно продифференцировать, то получится ряд Фурье ее производной*

$$f'(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty}{}' c_k' e^{ikx} = \sum_{-\infty}^{\infty}{}' (ik) c_k e^{ikx}. \tag{5}$$

*Здесь $\Sigma'$ обозначает, что в ряде нет нулевого коэффициента.*

Доказательство. В самом деле, $f'(x)$ — вообще кусочно непрерывная функция, имеющая разрывы там, где $f$ имеет разрывы производной, но в точках $x_s$ разрыва $f'$ существуют пределы $f'(x_s \pm 0)$. Такая функция может быть разложена в ряд Фурье

$$f'(x) \sim \sum{}' c_k' e^{ikx}, \tag{6}$$

возможно, и не сходящийся к ней во многих точках. При этом

$$c_0' = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)\,dt = \frac{1}{2}[f(2\pi)-f(0)] = 0,$$

потому что $f$ — непрерывная функция периода $2\pi$. С другой стороны, для всех $k \neq 0$ имеет место равенство (1), и поэтому из (6) следует (5). Ряд (4) равномерно сходится к $f(x)$ на основании теоремы 2 § 15.5.

Теорема 2. *Если ряд Фурье кусочно непрерывной функции (с разрывами первого рода!)*

$$\varphi(x) \sim \sum{}' c_k' e^{ikx} \quad (c_0' = 0) \tag{7}$$

*проинтегрировать почленно (считая, что интеграл от $e^{ikx}$ равен $(ik)^{-1}e^{ikx}$), то получим равномерно сходящийся ряд Фурье непрерывной кусочно гладкой функции*

$$f(x) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \sum_{-\infty}^{\infty}{}' c_k e^{ikx}, \tag{8}$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,e^{-ikt}dt \quad (k=\pm 1, \pm 2, \ldots),$$

*) Теорема верна для абсолютно непрерывной периода $2\pi$ функции (§ 19.5, (11)). Ее ряд Фурье равномерно сходится к ней, как это доказывается в более полных курсах рядов Фурье.

*где*

$$f(x) = \int_0^x \varphi(t)\,dt. \tag{9}$$

В самом деле, в силу (9) по теореме Ньютона — Лейбница функция $f(x)$ — непрерывная и кусочно гладкая на $[0, 2\pi]$. Кроме того,

$$f(2\pi) - f(0) = \int_0^x \varphi(t)\,dt \Big|_0^{2\pi} = 0,$$

потому что

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t)\,dt = c_0' = 0$$

и, следовательно, ряд Фурье $f$ равномерно сходится к $f$, откуда следует (8). С другой стороны, правая часть (8) может быть в силу (1) рассматриваема как результат указанного почленного интегрирования правой части (7).

Заметим, что на основании теоремы 2, § 15.5 ряд Фурье кусочно гладкой функции $f \in C^*$ сходится к ней на всей действительной оси и притом равномерно. Поэтому в (8) написан знак равенства. Что же касается функции $f'(x)$, то она кусочно непрерывна (на отрезке $[0, 2\pi]$). Ее ряд Фурье может расходиться (см. § 15.5 перед (12)). Поэтому в (5) написан знак $\sim$.

Замечание. Теоремы 1 и 2 значительно расширяют в случае рядов Фурье известные читателю из общей теории рядов критерии законности почленного их дифференцирования и интегрирования. Но возможно и дальнейшее расширение этих критериев, не только с помощью аппарата интеграла Лебега, но и еще путем введения понятия обобщенной функции (см. далее § 16.11).

Упражнение 1. Доказать, что если функция $f(x)$ периода $2\pi$ имеет непрерывную кусочно гладкую производную $f^{(l-1)}(x)$ порядка $(l-1)$, то ее можно представить в виде

$$(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} B_l(t-x)\, f^{(l)}(t)\,dt,$$

где

$$B_l(u) = \sum_1^\infty \frac{\cos\left(ku + \frac{l\pi}{2}\right)}{k^l} \quad (l = 1, 2, \ldots).$$

Упражнение 2. Пользуясь тем, что

$$B_1(u) = \sum_1^\infty \frac{\sin ku}{k}$$

и, таким образом, $B_1(u) = (u-\pi)/2$ $(0 < u < 2\pi)$, показать, что при любом $l = 1, 2, 3, \ldots$ $B_l(u)$ на отрезке $[0, 2\pi]$ представляет собой многочлен степени $l$ такой, что интеграл от него по $[0, 2\pi]$ равен нулю и $B'_{l+1} = -B_l$.

Эти многочлены называются многочленами Бернулли.