§ 15.8. Оценка остатка ряда Фурье.

Теорема 1. *Пусть функция f периода 2π имеет на всей оси непрерывную кусочно гладкую производную $f^{(l-1)}$ порядка $l-1$, а ее производная $f^{(l)}$ подчиняется неравенству*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f^{(l)}|^2\,dx \leqslant M^2. \tag{1}$$

Тогда уклонение функции $f(x)$ от ее $(N-1)$-й суммы Фурье оценивается следующим образом:

$$|f(x)-S_{N-1}(x)| \leqslant M\left(2\sum_N^\infty \frac{1}{k^{2l}}\right)^{1/2} < \sqrt{\frac{2}{2l-1}}\,\frac{M}{(N-1)^{l-\frac{1}{2}}} \tag{2}$$

Доказательство. Из условия теоремы следует, что ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к ней на действительной оси. Отклонение $f(x)$ от $S_{N-1}(x)$ может быть записано в виде

$$f(x)-S_{N-1}(x) = \\ = \sum_N^\infty \left(c_k e^{ikx}+c_{-k}e^{-ikx}\right) = \sum_N^\infty \left[\left(\frac{1}{ik}\right)^l c_k^{(l)} e^{ikx} + \left(\frac{1}{-ik}\right)^l c_{-k}^{(l)} e^{-ikx}\right], \tag{3}$$

где c_k — комплексные коэффициенты Фурье f, выраженные затем (в третьем члене цепи) через коэффициенты Фурье $c_k^{(l)}$ производной $f^{(l)}$ согласно формуле (3) предыдущего параграфа.

Если учесть, что

$$|e^{ikx}| = 1$$

(ведь x — действительное), и равенство Парсеваля для $f^{(l)}$, то

$$|f(x)-S_{N-1}(x)| \leqslant \\ \leqslant \sum_N^\infty \frac{1}{k^l}\left(|c_k^{(l)}|+|c_{-k}^{(l)}|\right) \leqslant \left(2\sum_N^\infty \frac{1}{k^{2l}}\right)^{1/2}\left(\sum_N^\infty\left(|c_k^{(l)}|^2+|c_{-k}^{(l)}|^2\right)\right)^{1/2} \leqslant \\ \leqslant \left(2\sum_N^\infty \frac{1}{k^{2l}}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f^{(l)}(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \leqslant M\left(2\sum_N^\infty \frac{1}{k^{2l}}\right)^{1/2}, \tag{4}$$

и мы получили первую оценку в (2). Вторая же более грубая оценка вытекает из неравенства

$$\sum_N^\infty \frac{1}{k^{2l}} \leqslant \int_{N-1}^\infty \frac{dx}{x^{2l}} = \frac{1}{2l-1}\,\frac{1}{(N-1)^{2l-1}}.$$

Замечание. Оценка (2) при тех же рассуждениях остается верной в предположении, что периодическая функция $f(x)$ имеет абсолютно непрерывную производную порядка $l-1$ и (почти всюду) производную порядка l, удовлетворяющую неравенству (1), где интеграл понимается в смысле Лебега (см. сноски к теоремам 1, 2 предыдущего параграфа).

Заметим, что можно доказать оценку

$$|f(x)-S_n(x)|<C\frac{\ln n}{n^l}\sup_x|f^{(l)}(x)|,$$

где C — константа, не зависящая от n, но это потребовало бы более сложных рассуждений.

Упражнение. Показать, ограничившись для простоты случаем, когда l делится на 4, что первая оценка в (2) — точная.

Указание. Из (3) при $x=0$ следует

$$f(0)-S_n(0)=\sum_{n+1}^{\infty}\frac{1}{k^l}\left(c_k^{(l)}+c_{-k}^{(l)}\right)$$

и первое, так же как второе, неравенства (4) достижимы, если числа $c_k^{(l)}$ подобрать пропорциональными соответственно $1/k^l$ (см. замечание после § 6.2, (8)).

§ 15.9. Явление Гиббса

Функция

$$\psi(x)=\sum_1^{\infty}\frac{\sin kx}{k} \tag{1}$$

равная

$$\frac{\pi-x}{2}=\sum_1^{\infty}\frac{\sin kx}{k} \tag{2}$$

на интервале $(0,\pi)$, имеет n-ю частную сумму

$$\psi_n(x)=\sum_1^{n}\frac{\sin kx}{k}. \tag{3}$$

Для нее при $0<x\leqslant\pi$ имеет место (пояснения ниже)

$$\frac{x}{2}+\psi_n(x)=\int_0^x\left(\frac{1}{2}+\sum_1^n\cos kt\right)dt=$$

$$\int_0^x\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt=\int_0^x\frac{\sin nt}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}dt+\frac{1}{2}\int_0^x\cos nt\,dt=\int_0^x\frac{\sin nt}{t}dt+$$