Замечание. Оценка (2) при тех же рассуждениях остается верной в предположении, что периодическая функция $f(x)$ имеет абсолютно непрерывную производную порядка $l-1$ и (почти всюду) производную порядка l, удовлетворяющую неравенству (1), где интеграл понимается в смысле Лебега (см. сноски к теоремам 1, 2 предыдущего параграфа).

Заметим, что можно доказать оценку

$$|f(x) - S_n(x)| < C \frac{\ln n}{n^l} \sup_x |f^{(l)}(x)|,$$

где C — константа, не зависящая от n, но это потребовало бы более сложных рассуждений.

Упражнение. Показать, ограничившись для простоты случаем, когда l делится на 4, что первая оценка в (2) — точная.

Указание. Из (3) при $x = 0$ следует

$$f(0) - S_n(0) = \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{k^l} \left(c_k^{(l)} + c_{-k}^{(l)}\right)$$

и первое, так же как второе, неравенства (4) достижимы, если числа $c_k^{(l)}$ подобрать пропорциональными соответственно $1/k^l$ (см. замечание после § 6.2, (8)).

§ 15.9. Явление Гиббса

Функция

$$\psi(x) = \sum_1^{\infty} \frac{\sin kx}{k} \tag{1}$$

равная

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_1^{\infty} \frac{\sin kx}{k} \tag{2}$$

на интервале $(0, \pi)$, имеет n-ю частную сумму

$$\psi_n(x) = \sum_1^{n} \frac{\sin kx}{k}. \tag{3}$$

Для нее при $0 < x \leqslant \pi$ имеет место (пояснения ниже)

$$\frac{x}{2} + \psi_n(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{2} + \sum_1^n \cos kt\right) dt =$$

$$\int_0^x \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = \int_0^x \frac{\sin nt}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt + \frac{1}{2} \int_0^x \cos nt\, dt = \int_0^x \frac{\sin nt}{t} dt +$$

$$+\int_0^x \sin nt\left(\frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}-\frac{1}{t}\right)dt+\frac{1}{2}\int_0^x \cos nt\,dt=\int_0^x \frac{\sin nt}{t}\,dt+o(1)$$
$$(n\to\infty)\quad (4)$$

равномерно относительно $x\in(0,\ \pi)$. Пояснения требует только оценка второго и третьего слагаемого в предпоследнем члене цепи. Например, второе слагаемое можно записать в виде

$$A_n=\int_0^x \sin nt\, g(t)\,dt=$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^x \sin nt\, g(t)\,dt-\frac{1}{2}\int_{\pi/n}^{x+\frac{\pi}{n}} \sin nt\, g\left(t+\frac{\pi}{n}\right)dt=$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin nt\, g(t)\,dt-\frac{1}{2}\int_x^{x+\frac{\pi}{n}} \sin nt\, g\left(t+\frac{\pi}{n}\right)dt+$$
$$+\frac{1}{2}\int_{\pi/n}^{x} \sin nt\left[g(t)-g\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\right]dt,$$

откуда ($|g(t)|\leqslant M$, $g(t)=0$ вне $(0,\ \pi)$, см. § 15.3, (7))

$$|A_n|\leqslant\frac{1}{2}\frac{\pi}{n}M+\frac{1}{2}\frac{\pi}{n}M+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|g(t)-g\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\right|dt\to 0,\ n\to\infty,\quad (5)$$

где правая часть не зависит от $x\in(0,\ \pi)$, поэтому левая стремится к нулю равномерно относительно указанных x.

Положив теперь в (4) $x=\pi/n$ и перейдя к пределу при $n\to\infty$, получим (пояснения ниже)

$$d_+=\lim_{n\to\infty}\psi_n\left(\frac{\pi}{n}\right)=\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt>\frac{\pi}{2}\quad (6)$$

(см. ниже (9), (12)). Между тем

$$\psi(0+0)=\lim_{\substack{x>0\\ x\to 0}}\frac{\pi-x}{2}=\frac{\pi}{2}.\quad (7)$$

Вычисления показывают, что отношение

$$\frac{d_+}{\frac{1}{2}(\psi(0+0)-\psi(0-0))}=\frac{d_+}{\psi(0+0)}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt=1{,}089490\ldots\quad (8)$$

Тот факт, что это отношение больше 1 (а не равно 1), называют *явлением Гиббса.*

На рис. 15.3 изображен схематический график функции $f(x)=-\psi(x-\pi)$ и ее n-й частной суммы $S_n(x)$. На $[-\pi+\delta, \pi-\delta]$, где $\delta>0$, при достаточно большом n функция $S_n(x)$ колеблется вблизи $f(x)$. Ведь $S_n(x)\to f(x)$ при $n\to\infty$ равномерно на этом отрезке. С другой стороны, вблизи $x=\pi$ график $S_n(x)$ резко отклоняется от $f(x)$ кверху — это и есть явление Гиббса. Затем он резко опускается к точке $x=\pi$ на оси x. На отрезке $[-\pi, 0]$ имеет место подобное явление.

Надо иметь в виду, что и для произвольной функции $f\in L^*$, непрерывной вместе со своей производной на полуинтервалах $[a, x^0)$, $(x^0, b]$, имеющей вместе со своей производной разрыв первого рода в x^0, имеет место подобное явление в окрестности точки x^0. Это вытекает из возможности представления функции f в виде суммы $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, где f_1 — непрерывная*) кусочно гладкая на $[a, b]$, а $f_2(x)=\frac{\varkappa}{\pi}\psi(x-x_0)$, где $\varkappa$ — скачок f. Ряд Фурье f_1 сходится к f_1 равномерно на $[a', b']\subset(a, b)$, функция же f_2 есть всего лишь сдвинутая и умноженная на постоянную функция ψ. Для нее (а следовательно, и для f) имеет место явление Гиббса с тем же отношением (8)

$$\frac{d_+(x_0)}{\frac{1}{2}(f(x_0+0)-f(x_0-0))}=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\frac{\sin t}{t}\,dt,$$

где теперь

$$d_+(x^0)=\lim_{n\to\infty}\left[S_n\left(x^0+\frac{\pi}{n}\right)-\frac{f(x^0+0)+f(x^0-0)}{2}\right],$$

а S_n — сумма Фурье f.

Явление Гиббса, так же как ряды Фурье, надо рассматривать как явление природы, да оно и обнаружено впервые чисто эмпирическим путем (Д. Ч. Гиббсом, американским физиком-теоретиком (1839—1903)).

Справедливы равенства

$$\frac{\pi}{2}=\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}\,dx=\int_0^\infty\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2dx. \tag{9}$$

Второе из них см. § 13.15 (8), (10) ($A(1)=A$), а первое можно получить из следующих соображений. Полагая в (4) $x=\pi$ и учитывая, что $\psi_n(\pi)=0$ (см. (3)), будем иметь

$$\frac{\pi}{2}=\int_0^\pi\frac{\sin nt}{t}\,dt+o(1)\to\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}\,dx\quad(n\to\infty), \tag{10}$$

*) Точнее, f_1 имеет, быть может, устранимые разрывы.

и так как здесь первый член не зависит от n, то и получим первое равенство (9).

Интеграл справа в (10) можно еще записать в виде ряда

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \sum_0^\infty \int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = \sum_0^\infty \int\limits_0^\pi \frac{\sin(k\pi+u)\,du}{k\pi+u} =$$

$$= \sum_0^\infty (-1)^k a_k,\quad a_k = \int\limits_0^\pi \frac{\sin u\,du}{k\pi+u}. \tag{11}$$

Ясно, что числа a_k неотрицательны и убывают к нулю, поэтому справа в (11) стоит ряд Лейбница.

В частности, отсюда следует, что

$$\frac{\pi}{2} = \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx < a_0 = \int\limits_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx. \tag{12}$$

Примечание. Функция

$$\lambda_n(x) = \int\limits_0^x \frac{\sin nt}{t}\,dt = \int\limits_0^{nx} \frac{\sin u}{u}\,du \tag{13}$$

достигает в точке π/n своего максимума, равного d_+ (см. (6)), на $[0, \infty)$.

В самом деле, подынтегральная функция во втором интеграле непрерывна и положительна на интервале $u \in (0, \pi)$, и потому $\lambda_n(x)$ строго возрастает на отрезке $[0, \pi/n]$. С другой стороны, $\lambda_n(\pi/n) > \lambda_n(x)$ для $x > \pi/n$, потому что в этом случае

$$\int\limits_{\pi/n}^x \frac{\sin nt}{t}\,dt = \sum_{k=1}^{k_0} \int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin u}{u}\,du + \int\limits_{(k_0+1)\pi}^{nx} \frac{\sin u}{u}\,du < 0$$

(k_0 — наибольшее натуральное, для которого $(k+1)\pi \leqslant nx$). Ведь слагаемые этой суммы последовательно меняют знак, уменьшаясь по абсолютной величине, и при этом первое из них отрицательное.

В заключение докажем равенство

$$\varlimsup_{\substack{n\to\infty\\ x\to 0}} \psi_n(x) = d_+,$$

выражающее, что 1) для любой последовательности значений $x_n \to 0$ предел $\lim\limits_{x_n\to 0} \psi_n(x_n)$, если он существует, не превышает d_+ и 2) существует такая последовательность $x_n \to 0$, для которой этот предел равен d_+.

Как мы знаем, утверждение 2) верно при

$$x_n = \frac{\pi}{n},$$

утверждение же 1) следует из неравенств (см. (4))

$$\psi_n(x_n) \leqslant \lambda_n(x_n) + o(1) \leqslant d_+ + o(1) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

§ 15.10. Сумма Фейера

В § 15.5 было отмечено, что существуют примеры непрерывных периода 2π функций f ($f \in C^*$), ряды Фурье которых расходятся в отдельных точках или даже в точках наперед заданного счетного множества, например, во всех рациональных точках. В связи с этим приобретает большое значение тот факт, что ряд Фурье произвольной функции $f \in C^*$ суммируется к ней методом средних арифметических и притом равномерно на всей действительной оси (см. § 11.10).

Зададим функцию $f \in L'^*$ (вообще L^*) и составим для нее ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt \, dt \quad (k = 0, 1, \ldots),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin kt \, dt \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Пусть

$$S_n = \frac{a_0}{2} + \sum_1^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

и

$$\sigma_n = \frac{S_0 + S_1 + \ldots + S_n}{n+1} \tag{1}$$

— *n-я средняя арифметическая сумма Фурье функции f.*

Первой нашей задачей будет получить компактное выражение для σ_n. Имеем

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, dt + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} D_k(t-x) f(t)\, dt \right\} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_0^n D_k(t-x) \right\} f(t)\, dt.$$