Как мы знаем, утверждение 2) верно при

$$x_n = \frac{\pi}{n},$$

утверждение же 1) следует из неравенств (см. (4))

$$\psi_n(x_n) \leqslant \lambda_n(x_n) + o(1) \leqslant d_+ + o(1) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

§ 15.10. Сумма Фейера

В § 15.5 было отмечено, что существуют примеры непрерывных периода 2π функций f ($f \in C^*$), ряды Фурье которых расходятся в отдельных точках или даже в точках наперед заданного счетного множества, например, во всех рациональных точках. В связи с этим приобретает большое значение тот факт, что ряд Фурье произвольной функции $f \in C^*$ суммируется к ней методом средних арифметических и притом равномерно на всей действительной оси (см. § 11.10).

Зададим функцию $f \in L'^*$ (вообще L^*) и составим для нее ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt \, dt \quad (k = 0, 1, \ldots),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin kt \, dt \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Пусть

$$S_n = \frac{a_0}{2} + \sum_1^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

и

$$\sigma_n = \frac{S_0 + S_1 + \ldots + S_n}{n+1} \tag{1}$$

— *n-я средняя арифметическая сумма Фурье функции f.*

Первой нашей задачей будет получить компактное выражение для σ_n. Имеем

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, dt + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} D_k(t-x) f(t)\, dt \right\} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_0^n D_k(t-x) \right\} f(t)\, dt.$$

Отделяя мнимую часть в равенстве

$$\sum_{k=0}^{n} e^{i\left(k+\frac{1}{2}\right)x} = \frac{e^{i\frac{x}{2}} - e^{i\left(n+\frac{3}{2}\right)x}}{1-e^{ix}} = \frac{1-e^{i(n+1)x}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}} \tag{2}$$

получим

$$\sum_{k=0}^{n} \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x = \frac{1-\cos(n+1)x}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin^2\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}. \tag{3}$$

Поэтому

$$\frac{1}{2} + \sum_{1}^{n} D_k(x) = \frac{1}{2} + \sum_{1}^{n} \frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \sum_{0}^{n} \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2,$$

и мы получили

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F_n(t-x) f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F_n(u) f(x+u)\,du, \tag{4}$$

где

$$F_n(x) = \frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2. \tag{5}$$

В последнем равенстве (4) мы воспользовались периодичностью подинтегральной функции.

Функция $\sigma_n(x)$ называется *суммой Фейера порядка* n, а функция $F_n(x)$ — *ядром Фейера порядка* n в честь венгерского математика Фейера (1880—1959). Легко видеть, что

$$F_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{n+1-k}{n+1}\cos k\mathbf{x}. \tag{6}$$

Поэтому сумму $\sigma_n(x)$ можно еще записать так:

$$\sigma_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{n+1-k}{n+1}(a_k\cos kx + b_k\sin kx). \tag{7}$$

Отметим следующие свойства ядра $F_n(x)$:

1) $F_n(x)$ — неотрицательный четный тригонометрический полином порядка n (см. (5) и (6));

2) $$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F_n(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F\,dt = 1 \qquad (8)$$

(см. (6), учесть ортогональность $\cos kx$ ($k = 1, \ldots, n$) к единице);

3) $$\int_\delta^\pi F_n(x)\,dx \leqslant \frac{1}{2(n+1)}\int_\delta^\pi \frac{dx}{\left(\sin\frac{\delta}{2}\right)^2} = \frac{\pi-\delta}{2(n+1)\left(\sin\frac{\delta}{2}\right)^2} \to 0 \ (n\to\infty).$$

На основании свойства 2) отклонение $\sigma_n(x)$ от $f(x)$ выражается формулой

$$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F_n(t-x)\,[f(t)-f(x)]\,dt =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\,[f(x+t)-f(x)]\,dt. \qquad (9)$$

В последнем равенстве мы воспользовались периодичностью подынтегральной функции.

Докажем теорему.

Теорема 1 (Фейера). *Для любой непрерывной (на действительной оси) периода 2π функции $f(x)$ (т. е. $f\in C^*$) ее сумма Фейера порядка n равномерно стремится к ней при $n\to\infty$, т. е.*

$$\|f-\sigma_n\|_{C(0,\,2\pi)} = \max|f(x)-\sigma_n(x) \to 0 \ (n\to\infty). \qquad (10)$$

Доказательство. Пусть $\omega(\delta)$ обозначает модуль непрерывности функции f. Это непрерывная функция от δ (см. § 7.10, пример 2). Тогда в силу (9) и свойств 1), 2), 3)

$$|\sigma_n(x)-f(x)| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\,\omega(|t|)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F_n(t)\,\omega(|t|)\,dt =$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\delta} F_n(t)\,\omega(|t|)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_\delta^{\pi} F_n(t)\,\omega(|t|)\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \omega(\delta) + K\frac{2}{\pi}\int_\delta^\pi F_n(t)\,dt < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} \quad (n>n_0), \qquad (11)$$
$$K \geqslant \omega(t),$$

если δ взято достаточно малым, чтобы $\omega(\delta) < \varepsilon/2$, а затем n_0 настолько большим, чтобы второе слагаемое в предыдущем члене цепи было при $n > n_0$ меньшим $\varepsilon/2$.

Отметим еще теоремы 2 и 5 следующего § 15.11, в которых даны (в n-мерном случае) еще другие свойства сумм Фейера, важные для теории рядов Фурье.

Мы уже отмечали выше, что средние арифметические числового ряда могут стремиться к пределу, в то время как сам ряд может расходиться. Это явление как раз имеет место для рядов Фурье непрерывных функций. Существует непрерывная функция, ряд Фурье которой расходится на любом заданном счетном множестве, например, на множестве всех рациональных точек. Однако это не мешает тому, как мы видели, что средние арифметические суммы Фурье для любой непрерывной функции f сходятся к f и даже равномерно.

Заметим, что из теоремы Фейера следует полнота системы тригонометрических функций

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \ldots \tag{12}$$

в C^*. Ведь если $f \in C^*$ и $\varepsilon > 0$, то найдется n такое, что выполняется неравенство (11), где $\sigma_n(x)$ — тригонометрический полином, т. е. конечная линейная комбинация из функций системы (12).

§ 15.11. Сведения из теории многомерных рядов Фурье

Функции

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{i\mathbf{kx}},\ \mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n);\ \mathbf{kx} = \sum_1^n k_j x_j;$$
$$k_j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;\ j = 0, \ldots, n, \tag{1}$$

имеют период 2π по каждой из переменных x_j.

Они ортогональны и нормальны на кубе (n-мерном периоде)

$$\Delta_* = \{-\pi \leqslant x_j \leqslant \pi;\ j = 1, \ldots, n\} \tag{2}$$

(или любом кубе со сторонами длины 2π), потому что

$$\int_{\Delta_*} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{i\mathbf{kx}} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-i\mathbf{lx}}\, d\mathbf{x} =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k_1 - l_1)x_1} dx_1 \ldots \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k_n - l_n)x_n} dx_n = \begin{cases} 0 & (\mathbf{k} \neq \mathbf{l}), \\ 1 & (\mathbf{k} = \mathbf{l}). \end{cases}$$

Ведь если $\mathbf{k} \neq \mathbf{l}$, то найдется j, для которого $k_j - l_j \neq 0$, и тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k_j - l_j)dx_j} dx_j = 0,$$

а если $\mathbf{k} = \mathbf{l}$, то под всеми интегралами в произведении стоит единица.

Ясно, что система (1) счетна.