Отметим еще теоремы 2 и 5 следующего § 15.11, в которых даны (в n-мерном случае) еще другие свойства сумм Фейера, важные для теории рядов Фурье.

Мы уже отмечали выше, что средние арифметические числового ряда могут стремиться к пределу, в то время как сам ряд может расходиться. Это явление как раз имеет место для рядов Фурье непрерывных функций. Существует непрерывная функция, ряд Фурье которой расходится на любом заданном счетном множестве, например, на множестве всех рациональных точек. Однако это не мешает тому, как мы видели, что средние арифметические суммы Фурье для любой непрерывной функции f сходятся к f и даже равномерно.

Заметим, что из теоремы Фейера следует полнота системы тригонометрических функций

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \ldots \tag{12}$$

в C^*. Ведь если $f \in C^*$ и $\varepsilon > 0$, то найдется n такое, что выполняется неравенство (11), где $\sigma_n(x)$ — тригонометрический полином, т. е. конечная линейная комбинация из функций системы (12).

§ 15.11. Сведения из теории многомерных рядов Фурье

Функции

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{i\mathbf{kx}},\ \mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n);\ \mathbf{kx} = \sum_{1}^{n} k_j x_j;$$
$$k_j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;\ j = 0, \ldots, n, \tag{1}$$

имеют период 2π по каждой из переменных x_j.

Они ортогональны и нормальны на кубе (n-мерном периоде)

$$\Delta_* = \{-\pi \leqslant x_j \leqslant \pi;\ j = 1, \ldots, n\} \tag{2}$$

(или любом кубе со сторонами длины 2π), потому что

$$\int_{\Delta_*} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{i\mathbf{kx}} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-i\mathbf{lx}}\, d\mathbf{x} =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k_1-l_1)x_1} dx_1 \ldots \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k_n-l_n)x_n} dx_n = \begin{cases} 0 & (\mathbf{k} \neq \mathbf{l}), \\ 1 & (\mathbf{k} = \mathbf{l}). \end{cases}$$

Ведь если $\mathbf{k} \neq \mathbf{l}$, то найдется j, для которого $k_j - l_j \neq 0$, и тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k_j-l_j)dx_j} dx_j = 0,$$

а если $\mathbf{k} = \mathbf{l}$, то под всеми интегралами в произведении стоит единица.

Ясно, что система (1) счетна.

Введем классы (комплексных или действительных) функций периода 2π (по каждой переменной x_j), определенных на R_n.

C^* — класс непрерывных функций с нормой

$$\|f\|_{C^*} = \max_{\mathbf{x}} |f(\mathbf{x})|.$$

L^* — класс интегрируемых (по Лебегу) на периоде Δ_* функций с нормой

$$\|f\|_{L^*} = \int_{\Delta^*} |f(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x}.$$

L_2^* — класс функций, измеримых по Лебегу и имеющих интегрируемый (по Лебегу) квадрат модуля на периоде с нормой

$$\|f\|_{L_2^*} = \left(\int_{\Delta^*} |f(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x}\right)^{1/2}.$$

Ряд Фурье в комплексной форме функции $f \in L^*$ имеет вид

$$f(\mathbf{x}) \sim \sum c_k e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}, \tag{3}$$

$$c_k = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\Delta^*} f(\mathbf{t})\, e^{-i\mathbf{k}\mathbf{t}} d\mathbf{t}, \tag{4}$$

где сумма распространена на всевозможные целочисленные векторы $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ $(k_j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;\ j = 1, \ldots, n)$.

Числа c_k *суть коэффициенты Фурье* f. N-я сумма Фурье f записывается в виде

$$S_N(\mathbf{x}) = \sum_{|k_j| \leqslant N} c_k e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\Delta_*} \sum_{|k_j| \leqslant N} e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{t}-\mathbf{x})} f(\mathbf{t})\, d\mathbf{t} =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\Delta_*} \sum_{|k_1| \leqslant N} e^{-ik_1(t_1 - x_1)} \ldots \sum_{|k_n| \leqslant N} e^{-ik_n(t_n - x_n)} f(\mathbf{t})\, d\mathbf{t} =$$
$$= \frac{1}{\pi^n} \int_{\Delta_*} \prod_{j=1}^{n} D_N(t_j - x_j)\, f(\mathbf{t})\, d\mathbf{t}, \tag{5}$$

где

$$D_N(u) = \frac{1}{2} + \sum_{1}^{N} \cos ku$$

— N-я сумма Дирихле.

Многомерный аналог N-й суммы Фейера имеет вид

$$\sigma_N(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi^n} \int_{\Delta_*} \Phi_N(\mathbf{t} - \mathbf{x})\, f(\mathbf{t})\, d\mathbf{t} = \frac{1}{\pi^n} \int_{\Delta_*} \Phi_N(\mathbf{u})\, f(\mathbf{x} + \mathbf{u})\, d\mathbf{u}, \tag{6}$$

$$\Phi_N(\mathbf{u}) = \prod_{j=1}^{n} F_N(u_j), \quad F_N(t) = \frac{1}{2(N+1)} \left(\frac{\sin \frac{N+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}}\right)^2. \tag{7}$$

Пусть

$$\Delta_\varepsilon = \{|u_j| \leqslant \varepsilon;\quad j = 1, \ldots, n\},$$

тогда $(\Phi_N(\mathbf{u}) \geqslant 0)$

$$\frac{1}{\pi^n} \int\limits_{\Delta_\varepsilon} \Phi_N(\mathbf{u})\, d\mathbf{u} \leqslant \frac{1}{\pi^n} \int\limits_{\Delta_*} \Phi_N(\mathbf{u})\, d\mathbf{u} = 1, \tag{8}$$

$$\frac{1}{\pi^n} \int\limits_{\Delta_* - \Delta_\varepsilon} \Phi_N(\mathbf{u})\, d\mathbf{u} \to 0 \qquad (N \to \infty). \tag{9}$$

Ведь плоскости, продолжающие грани Δ_ε, рассекают $\Delta_* - \Delta_\varepsilon$ на конечное число прямоугольников (прямоугольных параллелепипедов с ребрами, параллельными осям координат), на каждом из которых хотя бы одна координата u_{j_0} удовлетворяет неравенству $|u_{j_0}| \geqslant \varepsilon$, поэтому, если интеграл от $\Phi_N d\mathbf{u}$ записать в виде произведения интегралов от $F_n(u_j)du_j$, то один из множителей, соответствующий $j = j_0$, стремится при $N \to \infty$ к нулю, в то время как остальные (они положительны) не превышают 1 (см. в § 15.10 свойства 1)—3) ядра F_N).

Докажем теорему, обобщающую на n-мерный случай теорему 1 § 15.10.

Теорема 1. *Для функции* $f \in C^*$

$$\|f - \sigma_N\|_{C^*} \to 0 \qquad (N \to \infty),$$

где σ_N *есть ее* N*-я сумма Фейера* f.

Доказательство. Учитывая (7)—(9), получим ($\omega(\delta)$ — модуль непрерывности f)

$$|\sigma_N(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| = \frac{1}{\pi^n} \left| \int\limits_{\Delta_*} \Phi_N(\mathbf{u})\,[f(\mathbf{x}+\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})]\, d\mathbf{u} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi^n} \int\limits_{\Delta_*} \Phi_N(\mathbf{u})\, \omega(|\mathbf{u}|)\, d\mathbf{u} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi^n} \left(\omega(2\delta\sqrt{n}) \int\limits_{\Delta_\delta} \Phi_N(\mathbf{u})\, d\mathbf{u} + \frac{K}{\pi^n} \int\limits_{\Delta_* - \Delta_\delta} \Phi_N(\mathbf{u})\, d\mathbf{u} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \omega(2\delta\sqrt{n}) + \frac{K}{\pi^n} \int\limits_{\Delta_* - \Delta_\delta} \Phi_N(\mathbf{u})\, d\mathbf{u} < \varepsilon \qquad (N > N_0),$$

$$K = \max|\omega(t)|.$$

Сначала выбираем δ так, чтобы $\omega(2\delta\sqrt{n}) < \varepsilon/2$ ($2\delta\sqrt{n}$ — диаметр Δ_δ), а затем достаточно большое N_0, чтобы второе слагаемое в предпоследнем члене цепи оказалось меньшим, чем $\varepsilon/2$.

Теорема 2. *Для функции* $f \in L^*$

$$\|f - \sigma_N\|_{L^*} = \int_{\Delta_*} |f(\mathbf{x}) - \sigma_N(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x} \to 0 \qquad (N \to \infty),$$

где σ_N — *сумма Фейера* f *порядка* N.

Действительно (пояснения ниже),

$$\|f - \sigma_N\|_{L^*} \leqslant \frac{1}{\pi^n} \int_{\Delta_*} d\mathbf{x} \left| \int_{\Delta_*} \Phi_N(\mathbf{u}) [f(\mathbf{x}+\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})] \, d\mathbf{u} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi^n} \int_{\Delta_*} \Phi_N(\mathbf{u}) \, d\mathbf{u} \int_{\Delta_*} |f(\mathbf{x}+\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x} =$$

$$= \frac{1}{\pi^n} \int_{\Delta_*} \Phi_N(\mathbf{u}) \lambda(\mathbf{u}) \, d\mathbf{u} \to 0, \qquad N \to \infty, \tag{10}$$

где

$$\lambda(\mathbf{u}) = \int_{\Delta_*} |f(\mathbf{x}+\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x}$$

— функция периода 2π, непрерывная (см. ниже) и равная нулю при $\mathbf{u} = 0$. Для нее по теореме 1 последний интеграл в цепи (10) стремится к нулю при $N \to \infty$. Ведь этот интеграл есть значение в нулевой точке N-й суммы Фейера $\lambda(\mathbf{u})$.

Во втором соотношении в цепи (10) мы заменили порядок интегрирования — это законно, потому что в теории интеграла Лебега доказывается, что интегралы от неотрицательных измеримых функций, взятые последовательно по разным переменным, можно менять местами, не меняя результат (теорема Фубини § 19.3, свойство 19).

Непрерывность $\lambda(\mathbf{u})$ вытекает из следующих рассуждений:

$$|\lambda(\mathbf{u}) - \lambda(\mathbf{u}^0)| \leqslant \int_{\Delta_*} |f(\mathbf{x}+\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}+\mathbf{u}^0)| \, dx \to 0 \qquad (\mathbf{u} \to \mathbf{u}^0).$$

Последнее соотношение (стремление к нулю) следует из теоремы 6 § 14.4, где надо считать, что $f = 0$ вне некоторого конечного достаточно большого куба, содержащего в себе концентрический с ним куб Δ_*.

Теорема 3. *Система функций* (1) *полна в* C^* (*следовательно, в* L^* *и* L_2^*, *см.* § 14.9).

Это следует из теоремы 1, если учесть, что при любом N сумма Фейера $\sigma_N(\mathbf{x})$ есть сумма вида

$$\sum_{|k_j| \leqslant N} \alpha_k e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} = T_N(\mathbf{x}) \tag{11}$$

(α_k — числа), т. е. конечная линейная комбинация из функций системы (1) (тригонометрический полином порядка N). Ведь одномерное ядро Фейера можно записать в виде (см. § 15.10, (6))

$$F_N(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N} \frac{N+1-k}{N+1} \cos kx = \frac{1}{2}\left[1 + \sum_{1}^{N} \frac{N+1-k}{N+1}\left(e^{ikx} + e^{-ikx}\right)\right],$$

откуда видно, что ядро $\Phi_N(\mathbf{t}-\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^{n} F_N(t_j - x_j)$ есть тригонометрический полином по $\mathbf{x}$ порядка N с векторным параметром $\mathbf{t}$. Умножение $\Phi_N(\mathbf{t}-\mathbf{x})$ на $f(\mathbf{t})$ и интегрирование по параметру $\mathbf{t} \in \Delta_*$ (см. (6)) приводит в свою очередь к тригонометрическому полиному от $\mathbf{x}$ порядка N.

Теорема 4. *Ряд Фурье* (3) *функции* $f \in L_2^*$ *сходится к* f *в смысле среднего квадратического* $(L_2(\Delta_*))$.

Это следует из полноты в L_2^* ортогональной и нормальной на Δ_* системы функций (1) и из теоремы 1 § 14.6 общей теории ортогональных рядов.

Всякий ряд вида

$$\sum c_k e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \tag{12}$$

(c_k — числа), распространенный на всевозможные целочисленные векторы $\mathbf{k}$, называется тригонометрическим рядом (в комплексной форме).

Теорема 5. *Если ряд* (12) *есть ряд Фурье некоторой функции* f, *принадлежащей* L^*, *то эта функция единственная с точностью до множества меры нуль.*

В самом деле, пусть (12) есть ряд Фурье функции $f \in L^*$. Тогда

$$c_k = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\Delta_*} f(\mathbf{t})\, e^{-i\mathbf{k}\mathbf{t}} d\mathbf{t}.$$

Этим для любого N определяется однозначно сумма Фейера $\sigma_N(f, x)$ нашей функции f, так как ядро этой суммы $\Phi_N(\mathbf{u})$ есть вполне определенная линейная комбинация из функций $e^{-i\mathbf{k}\mathbf{u}}$ $(|k_j| \leqslant N)$. По теореме 2 $\sigma_N(\mathbf{x})$ стремится при $N \to \infty$ к $f(x)$ в смысле $L(\Delta_*)$. Но этим функция f определяется с точностью до множества меры нуль.

В конце § 15.5 уже отмечалась теорема Колмогорова, утверждающая существование функции $f_0 \in L^*$ от одной переменной, ряд Фурье которой расходится всюду на действительной оси. Таким образом, ряд Фурье функции f_0 совсем ее не представляет, если придавать значение только точечной сходимости ряда. Но это не мешает функции f_0 и вообще функциям $f \in L^*$ иметь тесную связь с их рядами Фурье по другим, так сказать, линиям. Ведь сумма Фейера тесно связана с рядами Фурье, а по теореме 2 сумма Фейера порядка N всякой функции $f \in L^*$ сходится к f в метрике L^*. Прямая связь между функциями $f \in L^*$ и их рядами Фурье устанавливается также и теоремой 5, в силу которой две разные (не равные почти всюду) функции из L^* имеют разные ряды Фурье. Мы увидим в дальнейшем (см. § 16.11), что именно по этой «линии» оказывается возможным обобщить понятие функции класса L^* на более общие объекты (вещи) — обобщенные периодические функции.

Формулу (5) для N-й суммы ряда Фурье можно еще записать в виде

$$S_N(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi^n} \int\limits_{\Delta_*} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{2} + \cos(t_j - x_j) + \ldots + \cos N(t_j - x_j) \right) f(\mathbf{t})\, d\mathbf{t} =$$

$$= \frac{1}{\pi^n} \int\limits_{\Delta_*} \sum_{k_1=0}^{N}{}' \ldots \sum_{k_n=0}^{N}{}' \cos k_1(t_1 - x_1) \ldots \cos k_n(t_n - x_n) f(\mathbf{t})\, d\mathbf{t}, \quad (13)$$

где штрих означает, что всюду под знаком суммы при $k_j = 0$ $(j = 1, \ldots, n)$ надо заменить $\cos k_j(t_j - x_j)$ на $1/2$.

Дальнейшие преобразования (13) мы запишем только в двумерном случае $(n = 2)$. При $n > 2$ они аналогичны.

Если положить

$$\left.\begin{aligned} a_{kl} &= \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos ku \cos lv\, f(u, v)\, du\, dv, \\ b_{kl} &= \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin ku \sin lv\, f(u, v)\, du\, dv, \\ c_{kl} &= \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos ku \sin lv\, f(u, v)\, du\, dv, \\ d_{kl} &= \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin ku \cos lv\, f(u, v)\, du\, dv \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

и

$$A_{kl} = A_{kl}(x, y) = a_{kl} \cos kx \cos ly + b_{kl} \sin kx \sin ly + \\ + c_{kl} \cos kx \sin ly + d_{kl} \sin kx \cos ly, \quad (15)$$

то

$$S_N(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{N}{}' \sum_{l=0}^{N}{}' \cos k(u - x) \cos l(v - y) f(u, v)\, du\, dv = \\ = \sum_{0}^{N} \sum_{0}^{N}{}' A_{kl}(x, y), \quad (16)$$

где штрих во второй сумме обозначает, что на самом деле, вместо A_{00}, A_{k0}, A_{0l} ($k, l \neq 0$) надо писать $A_{00}/4$, $A_{k0}/2$, $A_{0l}/2$ и соответствующее соглашение надо сделать в отношении первой суммы. Таким образом,

$$S_N(x, y) = \frac{a_{00}}{4} + \frac{1}{2}\sum_1^N (a_{k0}\cos kx + d_{k0}\sin kx) + \\ + \frac{1}{2}\sum_1^N (a_{0l}\cos ly + c_{0l}\sin ly) + \sum_1^N \sum_1^N A_{kl}(x, y). \quad (16')$$

Ряд Фурье (3) функции f по системе (1) преобразуется формально в ряд

$$f(x, y) \sim \frac{a_{00}}{4} + \frac{1}{2}\sum_1^\infty (a_{k0}\cos kx + d_{k0}\sin kx) + \\ + \frac{1}{2}\sum_1^\infty (a_{0l}\cos ly + c_{0l}\sin ly) + \sum_1^\infty \sum_1^\infty A_{kl}(x, y). \quad (17)$$

Но надо иметь в виду, что к ряду (17) мы могли бы прийти и непосредственно. Дело в том, что тригонометрические функции

$$\cos kx \cos ly,\ \sin kx \sin ly,\ \cos kx \sin ly,\ \sin kx \cos ly \quad (18)$$
$$(k,\ l = 0,\ +1,\ +2,\ \ldots)$$

образуют, как легко проверяется, ортогональную систему на прямоугольнике $\Delta_* = \{-\pi \leqslant x,\ y \leqslant \pi\}$.

Если разложить по этой системе f в ряд Фурье, то мы как раз получим ряд (17).

Таким образом, ряд (17), где числа a_{kl}, b_{kl}, c_{kl}, d_{kl} вычисляются по формулам (14), есть ряд Фурье f по системе (18). Числа (14) — коэффициенты Фурье f по системе (18).

Из сказанного следует, что *)

$$A_{kl} = a_{kl}\cos kx \cos ly + b_{kl}\sin kx \sin ly + \\ + c_{kl}\cos kx \sin ly + d_{kl}\sin kx \cos ly = \\ = c^*_{kl}e^{i(kx+ly)} + c^*_{k,-l}e^{i(kx-ly)} + c^*_{-k,l}e^{i(-kx+ly)} + c^*_{-k,-l}e^{-i(kx+ly)}.$$

Отметим еще, что система (18) полна в C^* (следовательно, в L^* или L_2^*), что следует из полноты системы (1) и того факта, что функции системы (1) суть конечные линейные комбинации из функций системы (18).

Наконец отметим, что, если $f \in L^*$ — действительная функция, то и ее коэффициенты Фурье a_{kl}, b_{kl}, c_{kl}, d_{kl} действительны,

*) На этот раз c^*_{kl} обозначает комплексный коэффициент Фурье, чтобы отличить его от c_{kl} в (14).

в то время как коэффициенты $\overset{*}{c}_{kl}$, вообще говоря, комплексны, но удовлетворяют условию сопряженности $\overset{*}{c}_{-k,-l} = \overset{*}{c}_{k,l}$.

Рассматривая снова n-мерный случай при прежних обозначениях, заметим, что если функция $f \in C^*$ имеет частную производную $\frac{\partial f}{\partial x_n} \in C^*$, то любой коэффициент Фурье c_k, где $k_n \neq 0$, можно проинтегрировать по частям (см. § 15.7):

$$c_k(f) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} e^{-i\sum_1^{n-1} k_j t_j} dt_1 \dots dt_{n-1} \int_0^{2\pi} e^{-ik_n t_n} f(t_1, \dots, t_n)\, dt_n =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} e^{-i\sum_1^{n-1} k_j t_j} dt_1 \dots dt_{n-1} \times$$

$$\times \frac{1}{ik_n} \int_0^{2\pi} e^{-ik_n t_n} \frac{\partial f}{\partial x_n}(t_1, \dots, t_n)\, dt_n = \frac{1}{ik_n} c_k\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

Вообще, если $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ — заданный целый неотрицательный вектор и $f^{(s)} \in C^*$ для любого неотрицательного целого вектора $\mathbf{s} \leqslant \lambda$ $(s_j \leqslant \lambda_j)$, то после соответствующего применения процесса интегрирования по частям получим

$$c_k(f) = \frac{1}{\mathbf{i}^{|\lambda|} \mathbf{k}^{\lambda}} c_k\left(f^{(\lambda)}\right) \qquad \left(|\lambda| = \sum_1^n \lambda_j,\ k^{\lambda} = k_1^{\lambda_1} \dots k_n^{\lambda_n}\right), \tag{19}$$

где если $k_j = 0$, то надо считать $\lambda_j = 0$ и $k_j^{\lambda_j} = 0^0 = 1$. Что касается чисел $c_{\mathbf{k}}\left(f^{(\lambda)}\right)$, то это коэффициенты Фурье производной $f^{(\lambda)}$.

На самом деле формула (19) верна в предположении, что функция $f \in L^*$ имеет обобщенные (по Соболеву) частные производные $f^{(\mathbf{k})} \in L^*$ $(k_j \leqslant \lambda_j$, см. § 19.5).

Теорема 6. *Пусть $\lambda = (\lambda, \dots, \lambda)$ — вектор с целыми положительными, равными между собой компонентами и функция $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ принадлежит C^* вместе со своими частными производными $f^{(k)}$ порядка $\mathbf{k} \leqslant \lambda$ $(k_j \leqslant \lambda)$ и выполняются неравенства*

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\Delta_*} |f^{(l)}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \leqslant M^2 \tag{20}$$

для любого вектора $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_n)$, имеющего компоненты l_j, равные 0 или $\lambda > 0$. Тогда N-я сумма Фурье $S_N(\mathbf{x})$ функции $f(\mathbf{x})$ отклоняется от $f(\mathbf{x})$ с оценкой

$$|f(\mathbf{x}) - S_N(\mathbf{x})| \leqslant \frac{CM}{N^{\lambda - \frac{1}{2}}},$$

где C зависит от λ, но не от M и N.

Доказательство. Остаток суммы S_N ряда Фурье f записывается в виде

$$\rho_N(x) = \sum_{\max|k_j|>N} c_k e^{ikx}. \tag{21}$$

Зададим натуральное m, удовлетворяющее неравенствам $0 \leqslant m < n$, и определим множество Ω_m целочисленных векторов $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$, координаты которых удовлетворяют соотношениям

$$\begin{gathered} |k_j| = 0 \quad (j = 1, \ldots, m, \text{ если } m > 0), \\ |k_{m+1}| > N, \ |k_j| \geqslant 1 \quad (j = m+2, \ldots, n, \text{ если } m < n-1). \end{gathered} \tag{22}$$

Через Ω_m мы также обозначим любое множество векторов $\mathbf{k}$, которое может быть сведено к описанному путем соответствующей перестановки индексов j. Очевидно, каждому m соответствует конечная система множеств Ω_m, кроме того, множество всех $\mathbf{k}$, на которые распространена сумма (21), равно

$$\{\mathbf{k}: \max|k_j| > N\} = \sum_{m=0}^{n-1} \sum \Omega_m, \tag{23}$$

где вторая сумма для каждого m распространена на все различные Ω_m.

Оценим сумму модулей только тех членов ряда (21), которые соответствуют векторам $\mathbf{k}$, принадлежащим некоторому Ω_m. Будем для определенности считать, что Ω_m описывается, как в (22). Для других Ω_m оценка аналогична. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k\in\Omega_m} |c_k| &= \sum_{k\in\Omega_m} \left| \frac{1}{k_{m+1}^{\lambda} \ldots k_n^{\lambda}} c_{\mathbf{k}} \left(\frac{\partial^{(n-m)\lambda} f}{\partial x_{m+1}^{\lambda} \ldots \partial x_n^{\lambda}} \right) \right| \leqslant \\ &\leqslant \left(\sum_{k\in\Omega_m} \frac{1}{k_{m+1}^{2\lambda} \ldots k_n^{2\lambda}} \right)^{1/2} \left(\sum_{\mathbf{k}\in\Omega_m} \left| c_k \left(\frac{\partial^{(n-m)\lambda} f}{\partial x_{m+1}^{\lambda} \ldots \partial x_n^{\lambda}} \right) \right|^2 \right)^{1/2} \leqslant \\ &\leqslant c'M \left(\sum_{k_{m+1}=N}^{\infty} \frac{1}{k_{m+1}^{2\lambda}} \sum_{k_{m+2}=1}^{\infty} \frac{1}{k_{m+2}^2} \ldots \sum_{k_n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n^2} \right)^{1/2} \leqslant \frac{c''M}{N^{\lambda-\frac{1}{2}}} \end{aligned} \tag{24}$$

(см. (19), (20)). Следовательно,

$$|\rho_N(\mathbf{x})| \leqslant \frac{CM}{N^{\lambda-1/2}}, \tag{25}$$

где C не зависит от M и N.

Из (25) следует, что ряд Фурье функции f сходится равномерно, но он, как мы знаем, сходится к f в смысле среднего квадратического. В таком случае он сходится равномерно именно к $f(x)$ (см. ниже лемму), и потому

$$|\rho_N(\mathbf{x})| = |f(\mathbf{x}) - S_N(\mathbf{x})| \leqslant \frac{CM}{N^{\lambda-\frac{1}{2}}},$$

что и требовалось доказать.

Лемма 1. *Если ряд*

$$u_0(\mathbf{x}) + u_1(\mathbf{x}) + u_2(\mathbf{x}) + \ldots$$

непрерывных на области Ω функций сходится в смысле среднего квадратического к непрерывной функции $S(\mathbf{x})$ и в то же время он сходится равномерно на Ω к $\sigma(\mathbf{x})$, то $S(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x})$ на Ω.

Доказательство. Пусть $S_N(\mathbf{x})$ — сумма первых N членов ряда, $V \subset \Omega$ — произвольный шар и

$$\varkappa_N = \max_{x \in V} |\sigma(\mathbf{x}) - S_N(\mathbf{x})|.$$

По условию $\varkappa_N \to 0$ (§ 11.7). Поэтому

$$\left(\int_V |S(\mathbf{x}) - \sigma(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_V |S(\mathbf{x}) - S_N(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}\right)^{1/2} + \left(\int_V |S_N(\mathbf{x}) - \sigma(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_V |S(\mathbf{x}) - S_N(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}\right)^{1/2} + \varkappa_N \sqrt{|V|} \to 0 \qquad (N \to \infty).$$

Следовательно, левая часть в этих соотношениях равна нулю, а так как функции $S(\mathbf{x})$ и $\sigma(\mathbf{x})$ непрерывны, то они тождественно равны.

Теорема 6 доказана. На самом деле она верна при тех же рассуждениях в предположении, что частные производные в (20) понимаются в смысле Соболева.

Введем для положительного $\eta > 0$ множество K_η (крест), являющееся объединением n множеств $\{|u_j| < \eta\}$ $(j = 1, \ldots, n)$, и докажем теорему.

Теорема 7. *Для функции $f \in L'^*$ (или L^*) при произвольном $\eta > 0$ имеет место равенство*

$$S_N(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi^n} \int_{K_\eta} \prod_{j=1}^{n} D_N(u_j) [f(\mathbf{x} + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x})] \, d\mathbf{u} + o(1) \; (N \to \infty) \tag{26}$$

равномерно на любой области Ω точек $\mathbf{x}$, где f ограничена.

Доказательство. Ограничимся рассмотрением двумерного случая. Имеем

$$\int_{\eta}^{\pi}\int_{\eta}^{\pi} D_N(u)\,D_N(v)\,[f(x+u,y+v)-f(x,y)]\,du\,dv =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \sin\left(N+\frac{1}{2}\right)u\,g(u)\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)v\,g(v)\times$$
$$\times[f(x+u,y+v)-f(x,y)]\,du\,dv \to 0 \qquad (N\to\infty) \qquad (27)$$

равномерно на области Ω, где f ограничена. Здесь

$$g(u)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sin\frac{u}{2}}, & \eta<u<\pi,\\ 0 & \text{вне } [\eta,\pi].\end{cases}$$

Свойство (27) следует из леммы, представляющей собой простое обобщение на двумерный случай леммы 2 § 15.4.

Свойство, подобное (27), очевидно, верно и для интеграла, стоящего в левой части (27), если его область интегрирования заменить на симметричные ей области относительно осей координат и начала координат.

Замечание. Более детальные исследования показали бы, что в формуле (26) крест K_η нельзя, вообще говоря, заменить на куб $\Delta_\eta=\{|u_j|\leqslant\eta;\ j=1,\ldots,n\}$, и в этом проявляется существенное различие между рядами Фурье функций многих переменных и одной переменной (ср. § 15.3, (8) и ниже § 16.8, (17)).

§ 15.12. Алгебраические многочлены. Многочлены Чебышева

Чтобы выяснить связь алгебраических многочленов с тригонометрическими полиномами, точнее, с четными тригонометрическими полиномами, обратимся к равенству

$$\cos n\theta + i\sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n =$$
$$= (\cos\theta)^n + iC_n^1(\cos\theta)^{n-1}\sin\theta + i^2C_n^2(\cos\theta)^{n-2}\sin^2\theta + \ldots$$

Члены его правой части с четными степенями $\cos\theta$ действительны, а с нечетными — мнимы. Кроме того, $(\sin\theta)^{2m} = (1-\cos^2\theta)^m$ $(m=1,2,\ldots)$. Из этого следует, что при любом натуральном n

$$\cos n\theta = Q_n(\cos\theta),$$

где $Q_n(x)=\cos n\arccos x = \alpha_0^{(n)}+\alpha_1^{(n)}(x)+\ldots+\alpha_n^{(n)}x^n$ — алгебраический многочлен степени n с действительными коэффициентами. Он называется *многочленом Чебышева степени n.*