Доказательство. Ограничимся рассмотрением двумерного случая. Имеем

$$\int_{\eta}^{\pi}\int_{\eta}^{\pi} D_N(u)\, D_N(v)\, [f(x+u, y+v) - f(x, y)]\, du\, dv =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \sin\left(N+\frac{1}{2}\right)u g(u) \sin\left(N+\frac{1}{2}\right) v g(v) \times$$

$$\times [f(x+u, y+v) - f(x, y)]\, du\, dv \to 0 \qquad (N\to\infty) \qquad (27)$$

равномерно на области Ω, где f ограничена. Здесь

$$g(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sin\frac{u}{2}}, & \eta < u < \pi, \\ 0 & \text{вне } [\eta, \pi]. \end{cases}$$

Свойство (27) следует из леммы, представляющей собой простое обобщение на двумерный случай леммы 2 § 15.4.

Свойство, подобное (27), очевидно, верно и для интеграла, стоящего в левой части (27), если его область интегрирования заменить на симметричные ей области относительно осей координат и начала координат.

Замечание. Более детальные исследования показали бы, что в формуле (26) крест K_η нельзя, вообще говоря, заменить на куб $\Delta_\eta = \{|u_j| \leqslant \eta;\ j = 1, \ldots, n\}$, и в этом проявляется существенное различие между рядами Фурье функций многих переменных и одной переменной (ср. § 15.3, (8) и ниже § 16.8, (17)).

§ 15.12. Алгебраические многочлены. Многочлены Чебышева

Чтобы выяснить связь алгебраических многочленов с тригонометрическими полиномами, точнее, с четными тригонометрическими полиномами, обратимся к равенству

$$\cos n\theta + i\sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n =$$

$$= (\cos\theta)^n + iC_n^1(\cos\theta)^{n-1}\sin\theta + i^2C_n^2(\cos\theta)^{n-2}\sin^2\theta + \ldots$$

Члены его правой части с четными степенями $\cos\theta$ действительны, а с нечетными — мнимы. Кроме того, $(\sin\theta)^{2m} = (1-\cos^2\theta)^m$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Из этого следует, что при любом натуральном n

$$\cos n\theta = Q_n(\cos\theta),$$

где $Q_n(x) = \cos n \arccos x = a_0^{(n)} + a_1^{(n)}(x) + \ldots + a_n^{(n)}x^n$ — алгебраический многочлен степени n с действительными коэффициентами. Он называется *многочленом Чебышева степени n*.

Очевидно,

$$Q_0(x) \equiv 1,$$
$$Q_1(x) = \cos\arccos x = x,$$
$$Q_2(x) = 2(\cos\arccos x)^2 - 1 = 2x^2 - 1,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Из сказанного следует, что всякий четный тригонометрический полином

$$T_n(\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_1^n \alpha_k \cos k\theta$$

при помощи подстановки $\theta = \arccos x$ (или $x = \cos\theta$), гомеоморфно (т. е. взаимно однозначно и непрерывно) отображающей отрезок $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ на отрезок $-1 \leqslant x \leqslant 1$, преобразуется в алгебраический многочлен степени n:

$$P_n(x) = T_n(\arccos x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_1^n \alpha_k \cos k \arccos x.$$

Важно, что и наоборот, подстановка $x = \cos\theta$ $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $-1 \leqslant x \leqslant 1)$ преобразует произвольный алгебраический многочлен

$$P^n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

степени n в четный тригонометрический полином (см. § 8.11, (8))

$$T_n(\theta) = P_n(\cos\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_1^n \alpha_k \cos k\theta,$$

где числа α_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ зависят от P_n.

§ 15.13. Теорема Вейерштрасса

Теорема 1 (Вейерштрасса). *Система функций*

$$1,\ x,\ x^2,\ \ldots \tag{1}$$

полна в пространстве $C(a, b)$ непрерывных функций. Иначе говоря, для любой непрерывной на $[a, b]$ функции $f(x)$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется алгебраический многочлен $P_n(x)$ такой, что

$$|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon \quad \text{для всех } x \in [a, b]. \tag{2}$$

Доказательство сначала проведем для отрезка $[-1, +1]$. Пусть на $[-1, +1]$ задана непрерывная функция $f(x)$. Тогда $f(\cos t)$ есть непрерывная на отрезке $[0, \pi]$ функция, и так как система функций

$$1,\ \cos t,\ \cos 2t,\ \ldots$$