Очевидно,

$$Q_0(x) \equiv 1,$$
$$Q_1(x) = \cos \arccos x = x,$$
$$Q_2(x) = 2(\cos \arccos x)^2 - 1 = 2x^2 - 1,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Из сказанного следует, что всякий четный тригонометрический полином

$$T_n(\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{1}^{n} \alpha_k \cos k\theta$$

при помощи подстановки $\theta = \arccos x$ (или $x = \cos\theta$), гомеоморфно (т. е. взаимно однозначно и непрерывно) отображающей отрезок $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ на отрезок $-1 \leqslant x \leqslant 1$, преобразуется в алгебраический многочлен степени n:

$$P_n(x) = T_n(\arccos x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{1}^{n} \alpha_k \cos k \arccos x.$$

Важно, что и наоборот, подстановка $x = \cos\theta$ $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi,$ $-1 \leqslant x \leqslant 1)$ преобразует произвольный алгебраический многочлен

$$P^n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

степени n в четный тригонометрический полином (см. § 8.11, (8))

$$T_n(\theta) = P_n(\cos\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{1}^{n} \alpha_k \cos k\theta,$$

где числа α_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ зависят от P_n.

§ 15.13. Теорема Вейерштрасса

Теорема 1 (Вейерштрасса). *Система функций*

$$1, x, x^2, \ldots \tag{1}$$

полна в пространстве $C(a, b)$ непрерывных функций. Иначе говоря, для любой непрерывной на $[a, b]$ функции $f(x)$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется алгебраический многочлен $P_n(x)$ такой, что

$$|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon \quad \text{для всех } x \in [a, b]. \tag{2}$$

Доказательство сначала проведем для отрезка $[-1, +1]$. Пусть на $[-1, +1]$ задана непрерывная функция $f(x)$. Тогда $f(\cos t)$ есть непрерывная на отрезке $[0, \pi]$ функция, и так как система функций

$$1, \cos t, \cos 2t, \ldots$$

полна в $C(0, \pi)$ (см. теорему 3 § 15.5), то для любого $\varepsilon > 0$ найдется четный тригонометрический полином $T_n(t)$ такой, что $|f(\cos t) - T_n(t)| < \varepsilon$.

Но $T_n(t)$ можно записать в виде $T_n(t) = P_n(\cos t)$, где P_n есть алгебраический многочлен степени n. Таким образом,

$$|f(\cos t) - P_n(\cos t)| < \varepsilon \quad (0 \leqslant t \leqslant \pi).$$

Но тогда

$$|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1).$$

Теорема для отрезка $[-1, +1]$ доказана.

Если теперь задана непрерывная функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, то сделаем подстановку

$$x = a + \frac{b-a}{2}(z+1),$$

линейно и взаимно однозначно отображающую отрезок $[-1, +1]$ изменения z на отрезок $[a, b]$ изменения x. Тогда функция $F(z) = f\left(a + \frac{b-a}{2}(z+1)\right)$ непрерывна на $[-1, +1]$, и по доказанному выше для нее найдется многочлен $P_n(z)$ такой, что

$$|F(z) - P_n(z)| < \varepsilon, \quad z \in [-1, +1].$$

Обратная подстановка приводит к неравенству

$$|f(x) - R_n(x)| < \varepsilon, \quad x \in [a, b],$$

где $R_n(x) = P_n\left(\frac{2(x-a)}{b-a} - 1\right)$ есть, очевидно, в свою очередь, многочлен.

Теорема доказана.

Заметим, что степень n многочлена $P_n(x)$, для которого по данному ε выполняется неравенство (2), зависит от ε. При $\varepsilon \to 0$, вообще говоря, $n \to \infty$.

§ 15.14. Многочлены Лежандра

Рассмотрим функции

$$L_0(x) \equiv 1, \quad L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n} \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

на отрезке $[-1, +1]$. Ясно, что это многочлены степени n и притом строго степени n. Дифференцируя $(x^2-1)^n = (x-1)^n(x+1)^n$ по правилу Лейбница n раз, получим

$$\frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n} = n!(x+1)^n + \ldots,$$

где не выписанные члены содержат множитель $x-1$. Поэтому