полна в $C(0, \pi)$ (см. теорему 3 § 15.5), то для любого $\varepsilon > 0$ найдется четный тригонометрический полином $T_n(t)$ такой, что $|f(\cos t) - T_n(t)| < \varepsilon$.

Но $T_n(t)$ можно записать в виде $T_n(t) = P_n(\cos t)$, где P_n есть алгебраический многочлен степени n. Таким образом,

$$|f(\cos t) - P_n(\cos t)| < \varepsilon \quad (0 \leqslant t \leqslant \pi).$$

Но тогда

$$|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1).$$

Теорема для отрезка $[-1, +1]$ доказана.

Если теперь задана непрерывная функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, то сделаем подстановку

$$x = a + \frac{b-a}{2}(z+1),$$

линейно и взаимно однозначно отображающую отрезок $[-1, +1]$ изменения z на отрезок $[a, b]$ изменения x. Тогда функция $F(z) = f\left(a + \frac{b-a}{2}(z+1)\right)$ непрерывна на $[-1, +1]$, и по доказанному выше для нее найдется многочлен $P_n(z)$ такой, что

$$|F(z) - P_n(z)| < \varepsilon, \quad z \in [-1, +1].$$

Обратная подстановка приводит к неравенству

$$|f(x) - R_n(x)| < \varepsilon, \quad x \in [a, b],$$

где $R_n(x) = P_n\left(\frac{2(x-a)}{b-a} - 1\right)$ есть, очевидно, в свою очередь, многочлен.

Теорема доказана.

Заметим, что степень n многочлена $P_n(x)$, для которого по данному ε выполняется неравенство (2), зависит от ε. При $\varepsilon \to 0$, вообще говоря, $n \to \infty$.

§ 15.14. Многочлены Лежандра

Рассмотрим функции

$$L_0(x) \equiv 1, \quad L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n} \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

на отрезке $[-1, +1]$. Ясно, что это многочлены степени n и притом строго степени n. Дифференцируя $(x^2-1)^n = (x-1)^n(x+1)^n$ по правилу Лейбница n раз, получим

$$\frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n} = n!\,(x+1)^n + \ldots,$$

где не выписанные члены содержат множитель $x - 1$. Поэтому

$L_n(1)=1$ $(n=0,\ 1,\ \ldots)$. Полагая $m<n$ и интегрируя по частям, получим

$$2^n n!\int\limits_{-1}^{+1} L_n(x)\,x^m dx=\int\limits_{-1}^{+1} x^m\,\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\,dx=x^m\,\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\Big|_{-1}^{1}-$$

$$-m\int\limits_{-1}^{+1} x^{m-1}\,\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\,dx=-m\int\limits_{-1}^{+1} x^{m-1}\,\frac{d^{n-1}(x^2-1)}{dx^{n-1}}\,dx=$$

$$\ldots=0.$$

Первое слагаемое в третьем члене цепи равно нулю, потому что $(x^2-1)^n$ имеет числа $+1$ и -1 своими нулями кратности n и, следовательно, производная $\dfrac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^n$ $(m=0,1,\ \ldots,\ n-1)$ при подстановке в нее $+1$ или -1 обращается в нуль. К последнему явно написанному интегралу, содержащему x^{m-1} (вместо исходного x^m), применяем снова интегрирование по частям, понижающее степень x еще на единицу, и т. д.— это, очевидно, приводит к нулю.

Полученное равенство показывает, что система (1) ортогональна на $[-1,\ +1]$.

Вычислим интеграл от квадрата $L_n(x)$ на $[-1,\ +1]$. Положим $u_n(x)=(x^2-1)^n$. Тогда

$$\int\limits_{-1}^{+1} u_n^{(n)}(x)\,u_n^{(n)}(x)\,dx=-\int\limits_{-1}^{+1} u_n^{(n-1)}(x)\,u_n^{(n+1)}(x)\,dx=$$

$$=\int\limits_{-1}^{+1} u_n^{(n-2)}(x)\,u_n^{(n+2)}(x)\,dx=\ldots=(-1)^n\int\limits_{-1}^{+1} u_n u_n^{(2n)}dx=$$

$$=(2n)!\int\limits_{-1}^{+1}(1-x)^n(1+x)^n\,dx.$$

Но

$$\int\limits_{-1}^{+1}(1-x)^n(1+x)^n\,dx=\frac{n}{n+1}\int\limits_{-1}^{+1}(1-x)^{n-1}(1+x)^{n+1}\,dx=\ldots$$

$$\ldots=\frac{n(n-1)\ldots1}{(n+1)(n+2)\ldots2n}\int\limits_{-1}^{+1}(1+x)^{2n}\,dx=\frac{(n!)^2}{(2n)!\,(2n+1)}\,2^{2n+1}.$$

Поэтому $\displaystyle\int\limits_{-1}^{+1} L_n^2(x)\,dx=\frac{2}{2n+1}$ и, следовательно, нормированные многочлены имеют вид

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} L_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n} \quad (n=0, 1, \ldots). \tag{2}$$

С другой стороны, если произвести процесс ортогонализации системы $1, x, x^2, \ldots$ на отрезке $[-1, +1]$, как это делалось в § 14.7, то мы получим полную ортогональную и нормальную на $[-1, +1]$ систему $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \ldots$

В этом процессе на n-м его этапе многочлен $P_n(x)$ степени n задавался как, во-первых, нормальный $\left(\int\limits_{-1}^{+1} P_n^2\,dx = 1\right)$, а во-вторых, ортогональный к $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$, и этим он определялся с точностью до знака. Но многочлен $\varphi_n(x)$ обладает всеми указанными свойствами и потому он тождественно равен одному из многочленов P_n ($+P_n$ или $-P_n$), именно тому, который имеет положительный коэффициент при x^n, потому что $\varphi_n(x)$ обладает этим свойством.

Так как система $P_0, P_1, \ldots$ полна в $C(-1, +1)$, то мы доказали, что система функций

$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \tag{3}$$

не только ортогональна и нормальна на $[-1, +1]$, но и полна в $C(-1, +1)$ (тем более в $L_2(-1, +1)$).

Функции $\varphi_n(x)$ называются *многочленами* (или полиномами) *Лежандра*, нормальными на отрезке $[-1, +1]$. Функции $L_n(x)$ также называются многочленами Лежандра, нормированными условием $L_n(1) = 1$ $(n = 0, 1, \ldots)$.

Таким образом, к полиномам Лежандра применима общая теория ортогональных систем функций. В частности, *любая функция $f(x) \in L_2(-1, +1)$ разлагается в ряд Фурье*

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty} (f, \varphi_k)\,\varphi_k(x)$$

по многочленам Лежандра φ_k, сходящийся к f на $[-1, +1]$ в смысле среднего квадратического.

Для рядов по многочленам Лежандра возможно исследование вопроса об обычной или равномерной сходимости их к функциям, как это делалось нами для тригонометрических рядов Фурье. Например, известно, что если функция f имеет на отрезке $[-1, +1]$ непрерывную вторую производную, то ее ряд по многочленам Лежандра равномерно на этом отрезке сходится к ней. Как и для рядов Фурье, оценка остаточного члена разложения f по многочленам Лежандра зависит от дифференциальных свойств f. Вообще, если функция лучше, то и оценка лучше. Отметим еще, что, как правило, сходимость рядов по полиномам Лежандра лучше строго внутри отрезка $[-1, +1]$ и хуже на концах его.