Глава 16

ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ. ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

§ 16.1. Понятие интеграла Фурье

В предыдущей главе мы рассматривали функции периода 2π, принадлежащие классу L'^* (вообще L^*). Для любой такой функции имеет смысл ее ряд Фурье

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_k e^{ikx} \tag{1}$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos kt\,dt \quad (k=0,1,\ldots), \tag{2}$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin kt\,dt \quad (k=1,2,\ldots), \tag{3}$$

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}f(t)e^{-ikt}\,dt \quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots), \tag{4}$$

$$c_k=\frac{a_k-ib_k}{2},\quad c_{-k}=\frac{a_k+ib_k}{2} \quad (k=0,1,2,\ldots;\ b_0=0).$$

Нас теперь будут интересовать, вообще говоря, непериодические функции, заданные на действительной оси, принадлежащие классу $L'=L'(-\infty,\infty)$ или более общему классу $L=L(-\infty,\infty)$ функций, интегрируемых на $(-\infty,\infty)$ по Лебегу.

Каждая функция $f\in L'$ абсолютно интегрируема в римановом несобственном смысле (см. § 14.2) на $(-\infty,\infty)$, функции же $f\in L$ абсолютно интегрируемы в лебеговом смысле на действительной оси. Все, что мы будем получать для $f\in L'$, верно и для $f\in L$, но для полного обоснования требует знания интеграла Лебега. Если $f\in L'$, то при любом действительном s имеют смысл интегралы

$$a(s)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos st\,dt, \tag{5}$$

$$b(s) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin st \, dt, \tag{6}$$

$$c(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ist} \, dt, \tag{7}$$

ведь, например,

$$|f(t) \cos st| \leqslant |f(t)| \in L'. \tag{8}$$

Функции $a(s)$, $b(s)$, $c(s)$ непрерывны. Если f имеет конечное число точек разрыва, то этот факт следует из равномерной сходимости интегралов (5), (6), (7), потому что функции, стоящие под их знаком, непрерывны по (s, t), за исключением тех t, где f разрывна. В общем же случае см. ниже лемму 1 § 16.2.

Функции $a(s)$, $b(s)$, $c(s)$ являются аналогами соответственно коэффициентов Фурье a_k, b_k, c_k периодической функции, но последние определены для дискретных значений k, в то время как функции $a(s)$, $b(s)$, $c(s)$ — для непрерывных s.

Имеют место свойства (см. лемму 1 § 15.4)

$$a(s) \to 0, \; b(s) \to 0, \; c(s) \to 0 \qquad (s \to \infty),$$

аналогичные соответствующим свойствам коэффициентов Фурье.

Функции $a(s)$, $b(s)$, $c(s)$ естественно было бы назвать соответственно косинус-, синус-преобразованием Фурье и комплексным преобразованием Фурье функции f, но из соображений симметрии принято эти названия применять к интегралам, отличающимся от указанных на некоторые коэффициенты.

Аналогом члена ряда Фурье естественно считать функцию (от x и параметра s)

$$a(s) \cos sx + b(s) \sin sx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos s(t - x) \, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[e^{is(t-x)} + e^{-is(t-x)}\right] dt = c(s) e^{isx} + c(-s) e^{-isx}.$$

При этом, если $f(t)$ действительна, то $c(-s) = \overline{c(s)}$.

Аналогом суммы Фурье порядка N является *простой интеграл Фурье* (пояснения ниже):

$$S_N(x) = \int_0^N (a(s) \cos sx + b(s) \sin sx) \, ds =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^N ds \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos s(t - x) \, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \, dt \int_0^N \cos s(t - x) \, ds =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sin N(t-x)}{t-x}\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t) \frac{\sin Nt}{t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\eta}^{\eta} f(x+t) \frac{\sin Nt}{t}\, dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\, g(t) \sin Nt\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\eta}^{\eta} f(x+t) \frac{\sin Nt}{t}\, dt + o(1) \quad (N \to \infty,\ \eta > 0), \qquad (9)$$

где $o(1) \to 0$ равномерно относительно x, принадлежащих любому отрезку $[a, b]$ и

$$g(t) = \begin{cases} 0, & |t| \leqslant \eta, \\ \frac{1}{t}, & |t| > \eta. \end{cases}$$

Первый интеграл в цепи (9) существует, потому что подынтегральная функция непрерывна по s. В третьем равенстве (9) изменен порядок интегрирования. В случае, если f имеет конечное число точек разрыва, это следует из теоремы 2 § 13.14, потому что интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos s(t-x)\, dt$$

равномерно сходится относительно $s \in [0, N]$, а подынтегральная функция непрерывна относительно (t, s), за исключением конечного числа точек t. В общем случае см. ниже лемму § 16.2. Наконец, в последнем равенстве остаток равен

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\, g(t) \sin Nt\, dt. \qquad (10)$$

Здесь $g(t)$ — очевидно, ограниченная на действительной оси, измеримая на любом конечном отрезке функция. На основании (2), § 15.4

$$\lim_{N \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\, g(t) \sin(Nt)\, dt = 0 \qquad (11)$$

равномерно на любом отрезке $[a, b]$, что дает последнее равен-

Функцию $S_N(x)$ можно еще записать в комплексной форме

$$S_N(x) = \int_0^N \left(c(s)e^{isx} + c(-s)e^{-isx}\right) ds = \int_{-N}^{N} c(s)e^{isx} ds =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} e^{isx} ds \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ist} dt. \quad (12)$$

§ 16.2. Лемма об изменении порядка интегрирования

Лемма 1. *Пусть функции* $f, \varphi \in L'(0, \infty)$ (*или* $L(0, \infty)$) *и* $\lambda(s, t)$ $(0 \leqslant s, t < \infty)$ — *непрерывная ограниченная функция* $(|\lambda(s, t)| \leqslant K)$. *Тогда интеграл*

$$\mu(s) = \int_0^\infty \lambda(s, t) f(t)\, dt \quad (1)$$

есть непрерывная ограниченная функция от s, и имеет место равенство

$$\int_0^\infty \varphi(s)\, ds \int_0^\infty \lambda(s, t) f(t)\, dt = \int_0^\infty f(t)\, dt \int_0^\infty \lambda(s, t) \varphi(s)\, ds. \quad (2)$$

Доказательство. Для $\varepsilon > 0$ подберем финитные непрерывные функции f_1, φ_1, для которых

$$\int_0^\infty |f(t) - f_1(t)|\, dt < \frac{\varepsilon}{K}, \quad \int_0^\infty |\varphi(t) - \varphi_1(t)|\, dt < \frac{\varepsilon}{K}.$$

Тогда, полагая

$$\mu(s) = \int_0^N \lambda(s, t) f_1(t)\, dt + \eta(s), \quad (3)$$

где N настолько велико, чтобы отрезок $[0, N]$ содержал носитель f_1, получим

$$|\eta(s)| = \left| \int_0^\infty [f(t) - f_1(t)]\, \lambda(s, t)\, dt \right| \leqslant K \int_0^\infty |f(t) - f_1(t)|\, dt < \varepsilon. \quad (4)$$

Так как интеграл в правой части (3) есть непрерывная функция от s и ограниченная, то по лемме 1 § 12.13 $\mu(s)$ непрерывна и к тому же ограничена $(|\mu(s)| \leqslant NK \max|f_1(t)| + \varepsilon)$. Следовательно, внешний интеграл (по s) в левой части (2) имеет смысл. Подобным образом доказывается существование интеграла справа в (2).