Функцию $S_N(x)$ можно еще записать в комплексной форме

$$S_N(x) = \int_0^N \left(c(s)e^{isx} + c(-s)e^{-isx}\right)ds = \int_{-N}^{N} c(s)e^{isx}\,ds =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-N}^{N} e^{isx}\,ds \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ist}\,dt. \quad (12)$$

## § 16.2. Лемма об изменении порядка интегрирования

Лемма 1. *Пусть функции* $f$, $\varphi \in L'(0, \infty)$ (*или* $L(0, \infty)$) *и* $\lambda(s, t)$ $(0 \leqslant s,\ t < \infty)$ — *непрерывная ограниченная функция* $(|\lambda(s, t)| \leqslant K)$. *Тогда интеграл*

$$\mu(s) = \int_0^\infty \lambda(s, t) f(t)\,dt \quad (1)$$

*есть непрерывная ограниченная функция от* $s$, *и имеет место равенство*

$$\int_0^\infty \varphi(s)\,ds \int_0^\infty \lambda(s, t) f(t)\,dt = \int_0^\infty f(t)\,dt \int_0^\infty \lambda(s, t)\varphi(s)\,ds. \quad (2)$$

Доказательство. Для $\varepsilon > 0$ подберем финитные непрерывные функции $f_1$, $\varphi_1$, для которых

$$\int_0^\infty |f(t) - f_1(t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{K}, \quad \int_0^\infty |\varphi(t) - \varphi_1(t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{K}.$$

Тогда, полагая

$$\mu(s) = \int_0^N \lambda(s, t) f_1(t)\,dt + \eta(s), \quad (3)$$

где $N$ настолько велико, чтобы отрезок $[0, N]$ содержал носитель $f_1$, получим

$$|\eta(s)| = \left|\int_0^\infty [f(t) - f_1(t)]\,\lambda(s, t)\,dt\right| \leqslant K\int_0^\infty |f(t) - f_1(t)|\,dt < \varepsilon. \quad (4)$$

Так как интеграл в правой части (3) есть непрерывная функция от $s$ и ограниченная, то по лемме 1 § 12.13 $\mu(s)$ непрерывна и к тому же ограничена $(|\mu(s)| \leqslant NK \max |f_1(t)| + \varepsilon)$. Следовательно, внешний интеграл (по $s$) в левой части (2) имеет смысл. Подобным образом доказывается существование интеграла справа в (2).

Теперь имеем (пояснения ниже)

$$\int_0^\infty \varphi(s)\,ds \int_0^\infty \lambda(s,t) f(t)\,dt = \int_0^N \varphi(s)\,ds \int_0^N \lambda(s,t) f(t)\,dt + o(1) =$$

$$= \int_0^N f(t)\,dt \int_0^N \varphi(s)\lambda(s,t)\,ds + o(1) = \int_0^\infty f(t)\,dt \int_0^\infty \varphi(s)\lambda(s,t)\,dt \quad (N\to\infty).$$

Первое равенство в цепи имеет место, потому что остаток в нашем кратном интеграле оценивается следующим образом:

$$\left| \int_N^\infty \int_0^N + \int_0^N \int_N^\infty + \int_N^\infty \varphi(s)\,ds \int_N^\infty f(t)\lambda(s,t)\,dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant K \left( \int_N^\infty \int_0^N + \int_0^N \int_N^\infty + \int_N^\infty |\varphi(s)|\,ds \int_N^\infty |f(t)|\,dt \right)' = o(1) \quad (N\to\infty).$$

Подобным образом доказывается и последнее равенство. Надо учесть, что третий член в нашей цепи есть постоянная и в то же время он стремится к четвертому (тоже постоянному числу), но тогда они равны.

Замечание 1. В лемме 1 переменные $s$, $t$ могут иметь векторный характер ($\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_m)$, $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n)$, $0 \leqslant s_j,\ t_k < \infty$).

Замечание 2. Равенство (2) следует также из теоремы Фубини в лебеговой теории (см. §§ 19.3, 19.4, свойство 19).

## § 16.3. Сходимость простого интеграла Фурье к порождающей его функции

Важнейшим свойством простого интеграла Фурье является тот факт, что при весьма общих условиях, налагаемых на порождающую его функцию $f$, он сходится к последней при $N\to\infty$, т. е.

$$f(x) = \lim_{N\to\infty} S_N(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t+x)\frac{\sin Nt}{t}\,dt. \tag{1}$$

Это вытекает из следующей важной леммы, устанавливающей глубокую связь между интегралами и рядами Фурье.

Лемма 1. *Пусть заданы две функции* $f \in L' = L'(-\infty, \infty)$ (*или* $L$) *и* $f_* \in L'^*$ (или $L^*$, $f_*$, *таким образом, периода* $2\pi$) *и пусть обе они равны на отрезке* $[a, b]$ ($f(x) = f_*(x)$, $x \in [a, b]$).

*Тогда для любого* $x \in (a, b)$ *имеет место*

$$\lim_{N\to\infty} \left[ S_N(x) - S_N^*(x) \right] = 0 \tag{2}$$

*равномерно относительно* $x$, *принадлежащих любому отрезку*