Теперь имеем (пояснения ниже)

$$\int_0^\infty \varphi(s)\,ds \int_0^\infty \lambda(s,t) f(t)\,dt = \int_0^N \varphi(s)\,ds \int_0^N \lambda(s,t) f(t)\,dt + o(1) =$$

$$= \int_0^N f(t)\,dt \int_0^N \varphi(s)\lambda(s,t)\,ds + o(1) = \int_0^\infty f(t)\,dt \int_0^\infty \varphi(s)\lambda(s,t)\,dt \quad (N\to\infty).$$

Первое равенство в цепи имеет место, потому что остаток в нашем кратном интеграле оценивается следующим образом:

$$\left|\int_N^\infty \int_0^N + \int_0^N \int_N^\infty + \int_N^\infty \varphi(s)\,ds \int_N^\infty f(t)\lambda(s,t)\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant K\left(\int_N^\infty \int_0^N + \int_0^N \int_N^\infty + \int_N^\infty |\varphi(s)|\,ds \int_N^\infty |f(t)|\,dt\right)' = o(1) \quad (N\to\infty).$$

Подобным образом доказывается и последнее равенство. Надо учесть, что третий член в нашей цепи есть постоянная и в то же время он стремится к четвертому (тоже постоянному числу), но тогда они равны.

Замечание 1. В лемме 1 переменные s, t могут иметь векторный характер ($\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_m)$, $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n)$, $0 \leqslant s_j,\ t_k < \infty$).

Замечание 2. Равенство (2) следует также из теоремы Фубини в лебеговой теории (см. §§ 19.3, 19.4, свойство 19).

§ 16.3. Сходимость простого интеграла Фурье к порождающей его функции

Важнейшим свойством простого интеграла Фурье является тот факт, что при весьма общих условиях, налагаемых на порождающую его функцию f, он сходится к последней при $N\to\infty$, т. е.

$$f(x) = \lim_{N\to\infty} S_N(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t+x)\frac{\sin Nt}{t}\,dt. \tag{1}$$

Это вытекает из следующей важной леммы, устанавливающей глубокую связь между интегралами и рядами Фурье.

Лемма 1. *Пусть заданы две функции* $f \in L' = L'(-\infty, \infty)$ (*или* L) *и* $f_* \in L'^*$ (или L^*, f_*, *таким образом, периода* 2π) *и пусть обе они равны на отрезке* $[a, b]$ ($f(x) = f_*(x)$, $x \in [a, b]$). *Тогда для любого* $x \in (a, b)$ *имеет место*

$$\lim_{N\to\infty}\left[S_N(x) - S_N^*(x)\right] = 0 \tag{2}$$

равномерно относительно x, *принадлежащих любому отрезку*

$[a', b'] \subset (a, b)$, *где* $S_N(x)$ — *простой интеграл Фурье* f, *а* $S_N^*(x)$ — N-*я частичная сумма Фурье функции* f_*.

Доказательство. *Зададим* $x \in (a, b)$ и пусть отрезок $[a', b'] \subset (a, b)$ содержит x. Положим

$$\eta = \min\{a' - a, b - b'\}.$$

С одной стороны (см. § 16.1, (9)), равномерно относительно $x \in [a, b]$

$$S_N(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\eta}^{\eta} f(x + t) \frac{\sin Nt}{t} dt + o(1) \quad (N \to \infty), \tag{3}$$

а с другой, равномерно относительно всех x

$$S_N^*(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\eta}^{\eta} f_*(x + t) \frac{\sin Nt}{t} dt + o(1) \quad (N \to \infty) \tag{4}$$

(см. § 15.3 (8), где заменить S_n, f на S_n^*, f^*). И так как в интегралах (3) и (4) $x + t \in [a, b]$, то в силу условия леммы $f(x + t) = f_*(x + t)$, и потому

$$S_N(x) - S_N^*(x) = o(1) - o(1) = o(1) \quad (N \to \infty)$$

и притом равномерно на $[a', b']$.

Будем называть определенную на оси $(-\infty, \infty)$ действительную или комплексную функцию $f(x)$ *локально кусочно гладкой*, если она кусочно гладкая, т. е. имеет вместе со своей производной конечное число точек разрыва первого рода на любом конечном отрезке $[a, b]$. Нам будет удобно еще считать, что для всех x выполняется условие $2f(x) = f(x + 0) + f(x - 0)$, хотя по обычной терминологии локально кусочно гладкая функция не обязательно должна удовлетворять этому дополнительному условию.

Имеет место

Теорема 1. *Простой интеграл Фурье локально кусочно гладкой функции* $f \in L'$ (L) *при* $N \to \infty$ *сходится к ней и притом равномерно на любом отрезке* $[a', b']$, *содержащемся строго внутри отрезка* $[a, b]$ $(a < a' < b' < b)$, *где* f *непрерывна.*

Доказательство. Зададим $x \in (-\infty, \infty)$ и пусть $[a, b]$ есть содержащий x отрезок, где пока $b - a < 2\pi$. Поместим этот отрезок внутрь какого-либо интервала $(\alpha, \alpha + 2\pi)$ $(\alpha < a < b < \alpha + 2\pi)$. Построим наряду с f функцию f_* периода 2π, равную f на $[\alpha, \alpha + 2\pi)$. Очевидно, $f_* \in L'^*$ есть кусочно гладкая периодическая функция. Для ее N-й суммы Фурье S_N^* имеет место

$$S_N^*(x) \to f_*(x), \quad x \in [a, b]. \tag{5}$$

Поэтому для простого интеграла Фурье функции f в силу леммы 1 имеет место

$$\lim_{N\to\infty} S_N(x) = \lim_{N\to\infty} S_N^*(x) + \lim_{N\to\infty} \left[S_N(x) - S_N^*(x)\right] = f_*(x) = f(x). \tag{6}$$

Из теории рядов Фурье мы также знаем, что свойство (5) имеет место равномерно на $[a', b'] \subset (a, b)$, если f непрерывна на $[a, b]$. Но тогда в силу леммы 1 и свойство (6) имеет место равномерно на $[a', b']$. В случае, если $b - a \geqslant 2\pi$, делим $[a', b']$ на отрезки длины меньшей, чем 2π. На каждом из них $S_N(x) \to f(x)$ равномерно, следовательно, равномерно и на $[a', b']$.

Равенство (6) доказано для случая, когда $N \to \infty$, пробегая натуральные числа. Но если $N = [N] + \alpha$ — положительное число, где $[N]$ — целая часть N, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Nt}{t} f(x+t)\,dt - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin [N]\,t}{t} f(x+t)\,dt =$$

$$= 2\int_{-\infty}^{\infty} \cos\left([N] + \frac{\alpha}{2}\right) t \,\frac{\sin\frac{\alpha}{2}t}{t} f(x+t)\,dt \to 0 \qquad (N\to\infty)$$

равномерно относительно x, принадлежащих любому конечному отрезку. Это следует из § 15.4, леммы 2, где надо положить

$$g(\alpha, t) = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}t}{t} \qquad (0 \leqslant \alpha < 1).$$

§ 16.4. Преобразование Фурье. Повторный интеграл Фурье. Косинус и синус преобразования Фурье

Заданная на действительной оси действительная или комплексная функция $f(x)$ называется *локально интегрируемой*, если $f \in L'(a, b)$ $(L(a, b))$, каков бы ни был конечный отрезок $[a, b]$.

Если $f \in L' = L'(-\infty, \infty)$, то $f \in L'(a, b)$, но, вообще говоря, не наоборот. Например, непрерывная на действительной оси функция локально интегрируема, но не обязательно принадлежит $L'(-\infty, \infty)$.

Если f локально интегрируема, то для нее для любого действительного x и любого $N > 0$ имеют смысл интегралы

$$\widetilde{f}^N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} f(t)\, e^{-ixt}\,dt, \quad \widehat{f}^N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} f(t)\, e^{ixt}\,dt. \tag{1}$$

Пределы

$$\lim_{N\to\infty} \widetilde{f}^N(x) = \widetilde{f}(x), \quad \lim_{N\to\infty} \widehat{f}^N(x) = \widehat{f}(x), \tag{2}$$