Поэтому для простого интеграла Фурье функции f в силу леммы 1 имеет место

$$\lim_{N\to\infty} S_N(x) = \lim_{N\to\infty} S_N^*(x) + \lim_{N\to\infty}\left[S_N(x) - S_N^*(x)\right] = f_*(x) = f(x). \tag{6}$$

Из теории рядов Фурье мы также знаем, что свойство (5) имеет место равномерно на $[a', b'] \subset (a, b)$, если f непрерывна на $[a, b]$. Но тогда в силу леммы 1 и свойство (6) имеет место равномерно на $[a', b']$. В случае, если $b - a \geqslant 2\pi$, делим $[a', b']$ на отрезки длины меньшей, чем 2π. На каждом из них $S_N(x) \to f(x)$ равномерно, следовательно, равномерно и на $[a', b']$.

Равенство (6) доказано для случая, когда $N \to \infty$, пробегая натуральные числа. Но если $N = [N] + \alpha$ — положительное число, где $[N]$ — целая часть N, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Nt}{t} f(x+t)\,dt - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin [N]\,t}{t} f(x+t)\,dt =$$

$$= 2\int_{-\infty}^{\infty} \cos\left([N] + \frac{\alpha}{2}\right)t\,\frac{\sin\frac{\alpha}{2}t}{t} f(x+t)\,dt \to 0 \qquad (N\to\infty)$$

равномерно относительно x, принадлежащих любому конечному отрезку. Это следует из § 15.4, леммы 2, где надо положить

$$g(\alpha, t) = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}t}{t} \qquad (0 \leqslant \alpha < 1).$$

§ 16.4. Преобразование Фурье. Повторный интеграл Фурье. Косинус и синус преобразования Фурье

Заданная на действительной оси действительная или комплексная функция $f(x)$ называется *локально интегрируемой*, если $f \in L'(a, b)$ $(L(a, b))$, каков бы ни был конечный отрезок $[a, b]$.

Если $f \in L' = L'(-\infty, \infty)$, то $f \in L'(a, b)$, но, вообще говоря, не наоборот. Например, непрерывная на действительной оси функция локально интегрируема, но не обязательно принадлежит $L'(-\infty, \infty)$.

Если f локально интегрируема, то для нее для любого действительного x и любого $N > 0$ имеют смысл интегралы

$$\widetilde{f}^N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-N}^{N} f(t)\,e^{-ixt}\,dt, \quad \widehat{f}^N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-N}^{N} f(t)\,e^{ixt}\,dt. \tag{1}$$

Пределы

$$\lim_{N\to\infty} \widetilde{f}^N(x) = \widetilde{f}(x), \quad \lim_{N\to\infty} \widehat{f}^N(x) = \widehat{f}(x), \tag{2}$$

если они существуют, мы будем называть *преобразованиями Фурье функции* f, соответственно *прямым и обратным*. Мы их будем записывать в виде

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-ixt}\, dt, \quad \hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{ixt}\, dt, \qquad (3)$$

но помнить, что интегралы в (3) надо понимать вообще в смысле главного значения $\left(\lim\limits_{N\to\infty} \int\limits_{-N}^{N}\right)$.

Для функций $f \in L'$ (или L) их преобразования Фурье всегда имеют смысл и интегралы (3) суть обычные *абсолютно сходящиеся* несобственные интегралы и их можно понимать как $\lim\limits_{N,N'\to\infty} \int\limits_{-N}^{N'}$, где N, N' независимы между собой.

В силу сделанных определений (см. § 16.1, (9), (12)) справедливо равенство

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} ds \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos s(t - x)\, dt = \hat{\tilde{f}}(x). \qquad (4)$$

Оно во всяком случае, как это было доказано в § 16.3, верно для локально кусочно гладкой функции $f \in L'$. Причем внутренний интеграл (по t) абсолютно сходится, а внешний (по s) сходится, но, может быть, не абсолютно.

Кратный интеграл в (4) называется *повторным интегралом Фурье функции* f.

Таким образом, *повторный интеграл Фурье локально кусочно гладкой функции* $f \in L'$ *равен самой функции* f.

Что касается третьего члена (4), то он указывает, что f можно рассматривать как результат двух операций — преобразования Фурье и затем обратного преобразования Фурье, т. е. $\hat{\tilde{f}}$.

Верно также равенство $f(x) = \tilde{\hat{f}}(x)$ при тех же условиях на f, потому что

$$\tilde{\hat{f}}(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^{N} e^{-isx}\, ds \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{ist}\, dt =$$
$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^{N} e^{isx}\, ds \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-ist}\, dt = \hat{\tilde{f}}(x)$$

(замена в интеграле s на $-s$).

Равенства

$$f(x) = \hat{\tilde{f}}(x) = \tilde{\hat{f}}(x) \qquad (5)$$

на самом деле верны при более общих условиях, налагаемых на f, в особенности если соответствующим образом обобщить операции $\sim$ и $\wedge$ преобразований Фурье (см. далее).

Из (4) следует равенство

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos sx\,ds\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos st\,dt+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \sin sx\,ds\int_{-\infty}^\infty f(t)\sin st\,dt \qquad (4')$$

для локально кусочно гладкой функции $f\in L'(-\infty,\ \infty)$. Если при этом $f(x)$ четная, то

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos sx\,ds\int_0^\infty \cos st\,f(t)\,dt, \qquad (6)$$

если же нечетная, то

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin sx\,ds\int_0^\infty \sin st\,f(t)\,dt. \qquad (7)$$

В формулах (6) и (7) можно считать, что $x\geqslant 0$, а $f(t)$ есть произвольная локально кусочно гладкая функция, принадлежащая $L'(0,\ \infty)$. Ведь в этих формулах используются только значения f на полуоси $[0,\ \infty)$. Поясним это замечание подробнее.

Пусть задана локально кусочно гладкая функция $f\in L'(0,\ \infty)$ такая, что $f(0)=f(0+0)$. Продолжив ее на всю действительную ось четным образом, получим четную локально кусочно гладкую функцию $f\in L'(-\infty,\ \infty)$, для которой верна формула (6); в частности, она верна для $x\geqslant 0$.

Будем теперь считать, что для нашей локально кусочно гладкой функции ($f\in L'(0,\ \infty)$) выполняется равенство $f(0)=0$ (вообще $f(0+0)\neq f(0)$). Продолжив f нечетным образом на $(-\infty,\ \infty)$, получим нечетную локально кусочно гладкую функцию $f\in L'(-\infty,\ \infty)$, для которой верна формула (7); в частности, она верна для $x\geqslant 0$. Подчеркнем, что в формуле (7) $f(0)=0$, в то время как в формуле (6) значение $f(0)=f(0+0)$ может быть любым.

Интегралы

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\cos st\,dt,\quad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\sin st\,dt$$

называются соответственно *косинус-* и *синус-преобразованиями Фурье*. Из формул (6) и (7) непосредственно следует, что если к локально кусочно гладкой функции $f \in L'(0, \infty)$ (или L) применить последовательно два раза косинус- (или синус-) преобразование Фурье, то получим исходную функцию f. В этом смысле косинус- (синус-) преобразование Фурье является обратным самому себе.

Упражнения. Доказать следующие формулы для локально кусочно гладких функций $f \in L'(-\infty, \infty)$. Например.

$$\widehat{e^{i\mu t}\widetilde{f}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{i\mu t} e^{ixt}\, dt \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(u)\, e^{-iut}\, du =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{i(\mu+x)t}\, dt \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(u)\, e^{-iut}\, du = \widehat{\widetilde{f}}(\mu+x) = f(\mu+x).$$

1. $\widehat{f}(-t) = \widetilde{f}(t)$. 2. $\widetilde{f}(-x) = \widehat{f}(x)$. 3. $\widetilde{f(at)} = \frac{1}{|a|}\widetilde{f}\left(\frac{x}{a}\right)$.

4. $\widehat{f(at)} = \frac{1}{|a|}\widehat{f}\left(\frac{x}{a}\right) \quad (a \neq 0)$.

5. $\widehat{e^{i\mu t}\widetilde{f}} = \widetilde{e^{-i\mu t}\widehat{f}} = f(x+\mu)$ (μ — действительное).

Примеры.

Справедливы равенства (пояснения ниже)

$$1)\quad f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant |x| \leqslant a \\ 0, & a \leqslant |x| \end{cases} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos sx \frac{\sin as}{s}\, ds,$$

$$2)\quad f(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} x, & |x| < 1 \\ 0, & 1 < |x| \end{cases} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin sx \frac{1-\cos s}{s}\, ds,$$

$$3)\quad f(x) = \begin{cases} 1, & a < x \leqslant b \\ 0, & x < a,\ b < x \end{cases} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin s(x-a) - \sin s(x-b)}{s}\, ds,$$

$$4)\quad \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-a\lambda}\cos \lambda x\, d\lambda = \frac{1}{a^2+x^2},$$

$$5)\quad \int_0^\infty e^{-a\lambda}\sin \lambda x\, d\lambda = \frac{x}{a^2+x^2},$$

$$6)\quad e^{-as} = \frac{2a}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos sx\, dx}{a^2+x^2} \quad (a > 0,\ 0 \leqslant s < \infty),$$

$$7)\quad e^{-as} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{x}{a^2+x^2}\sin sx\, ds \quad (0 < s < \infty),$$

$$8)\ f(x)=\begin{Bmatrix}\sin x, & |x|\leqslant\pi\\ 0, & |x|>\pi\end{Bmatrix}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin s\pi}{1-s^2}\sin sx\,ds,$$

$$9)\ f(x)=\begin{Bmatrix}\cos x, & |x|\leqslant\frac{\pi}{2}\\ 0, & |x|>\frac{\pi}{2}\end{Bmatrix}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\cos\frac{\lambda\pi}{2}}{1-\lambda^2}\cos\lambda x\,d\lambda,$$

$$10)\ f(x)=e^{-\alpha|x|}\cos\beta x=\frac{\alpha}{\pi}\int_0^\infty\cos sx\left[\frac{1}{(s-\beta)^2+\alpha^2}+\frac{1}{(s+\beta)^2+\alpha^2}\right]ds$$

$(\alpha>0)$,

$$11)\ f(x)=e^{-\alpha|x|}\sin\beta x=\frac{4\alpha\beta}{\pi}\int_0^\infty\frac{s\sin sx}{[(s-\beta)^2+\alpha^2]\ [(\alpha+\beta)^2+\alpha^2]}\,ds$$

$(\alpha>0)$,

$$12)\ f(x)=e^{-x^2}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\cos sx e^{-s^2/4}\,ds,$$

$$13)\ f(x)=xe^{-x^2}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\lambda\sin\lambda x e^{-\lambda^2/4}\,d\lambda.$$

При пользовании обычными методами теории неопределенных интегралов, не видно, как можно вычислить интегралы, стоящие в правых частях равенств 1)—3). С другой стороны, функции 1)—3) кусочно гладкие и принадлежат $L'(-\infty,\ \infty)$ $(f\in L'(-\infty,\ \infty))$. Поэтому к ним применима формула (4′). Эта формула упрощается и имеет вид (6), если f — четная функция, а, если f — нечетная, то она имеет вид (7), например, функция 1) четная, и потому

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\cos sx\,dx\int_0^a\cos st\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\cos sx\frac{\sin sa}{s}\,ds,$$

где надо считать, что в точках разрыва f выполняется равенство $f(x)=\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$. Интегралы 4), 5) вычисляются интегрированием по частям.

Умножив 4) на $\frac{2a}{\pi}\cos sx$ и проинтегрировав по x на $(0,\ \infty)$, получим

$$\frac{2a}{\pi}\int_0^\pi\frac{\cos sx}{a^2+x^2}\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\cos sx\,dx\int_0^\infty e^{-a\lambda}\cos\lambda x\,d\lambda=e^{-a|s|},$$

где последнее равенство имеет место в силу формулы (6), применимой, потому что $e^{-\alpha\lambda} \in L'(0, \infty)$ — гладкая функция.

Подобными рассуждениями получается формула 7) из 5), если применить формулу (7).

Функция 8) нечетная кусочно гладкая. Чтобы получить нужный интеграл, представляем ее по формуле (7), где внутренний интеграл равен

$$\int_0^\infty \sin st\, f(t)\, dt = \int_0^\pi \sin st \sin t\, dt = \frac{\sin s\pi}{1 - s^2}.$$

Этот интеграл удобно вычислить интегрированием по частям два раза.

Представление функции 9) получается аналогично применением формулы (6).

Функция 10) четная. Чтобы получить нужный интеграл, представляем ее по формуле (6), где внутренний интеграл

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t} \cos \beta t \cos st\, dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\alpha t} \cos(\beta + s)\, t\, dt +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\alpha t} \cos(\beta - s)\, t\, dt = \frac{\alpha}{2} \left[\frac{1}{(\beta + s)^2 + \alpha^2} + \frac{1}{(\beta - s)^2 + \alpha^2} \right].$$

Это получается интегрированием по частям два раза.

Аналогичные рассуждения проходят для функции 11), если воспользоваться формулой (7).

Функция 12) четная и для нее верна формула (6):

$$e^{-x^2} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos sx\, ds \int_0^\infty \cos st e^{-t^2}\, dt.$$

Но (см. § 13.16, пример 3)

$$\int_0^\infty \cos st e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-s^2/4},$$

откуда следует представление 12).

Представление 13) получается аналогично по формуле (7), если учесть § 13.15, уравнение 3.

§ 16.5. Производная и преобразование Фурье

Теорема. *Пусть f — непрерывная локально кусочно гладкая функция и f, $t\bar{f}(t) \in L' = L'(-\infty, \infty)$ (или L). Тогда f имеет непрерывную производную (т. е. на самом деле она гладкая),*