где последнее равенство имеет место в силу формулы (6), применимой, потому что $e^{-\alpha\lambda} \in L'(0, \infty)$ — гладкая функция.

Подобными рассуждениями получается формула 7) из 5), если применить формулу (7).

Функция 8) нечетная кусочно гладкая. Чтобы получить нужный интеграл, представляем ее по формуле (7), где внутренний интеграл равен

$$\int_0^\infty \sin st\, f(t)\, dt = \int_0^\pi \sin st \sin t\, dt = \frac{\sin s\pi}{1-s^2}.$$

Этот интеграл удобно вычислить интегрированием по частям два раза.

Представление функции 9) получается аналогично применением формулы (6).

Функция 10) четная. Чтобы получить нужный интеграл, представляем ее по формуле (6), где внутренний интеграл

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t} \cos \beta t \cos st\, dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\alpha t} \cos(\beta + s)\, t\, dt +$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\alpha t} \cos(\beta - s)\, t\, dt = \frac{\alpha}{2}\left[\frac{1}{(\beta+s)^2+\alpha^2} + \frac{1}{(\beta-s)^2+\alpha^2}\right].$$

Это получается интегрированием по частям два раза.

Аналогичные рассуждения проходят для функции 11), если воспользоваться формулой (7).

Функция 12) четная и для нее верна формула (6):

$$e^{-x^2} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos sx\, ds \int_0^\infty \cos st e^{-t^2}\, dt.$$

Но (см. § 13.16, пример 3)

$$\int_0^\infty \cos st e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-s^2/4},$$

откуда следует представление 12).

Представление 13) получается аналогично по формуле (7), если учесть § 13.15, уравнение 3.

§ 16.5. Производная и преобразование Фурье

Теорема. *Пусть f — непрерывная локально кусочно гладкая функция и f, $t\bar{f}(t) \in L' = L'(-\infty, \infty)$ (или L). Тогда $\hat{f}$ имеет непрерывную производную (т. е. на самом деле она гладкая),* *равную*

$$f'(x) = \widehat{itf}(x) \tag{1}$$

(*коротко* $f' = \widehat{itf}$).

Доказательство. Так как $f \in L'$, то функция $\tilde{f}$ всюду непрерывна. Далее из того, что $t\tilde{f} \in L'$, следует, что $\tilde{f} \in L'$ ($|t| \geqslant 1$), но тогда $\tilde{f} \in L' = L'(-\infty, \infty)$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(u)\, e^{ixu}\, du \tag{2}$$

и

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} iu\tilde{f}(u)\, e^{ixu}\, du. \tag{3}$$

Дифференцирование под знаком интеграла законно, потому что в силу неравенства

$$|iu\tilde{f}(u)e^{-ixu}| \leqslant |u\tilde{f}(u)| \in L'$$

интеграл (3) равномерно сходится относительно x и, кроме того, подынтегральная функция в (3) непрерывна по x, u. Теорема доказана.

§ 16.6. Пространство S

По определению функция $\varphi = \varphi(x)$ *от одной переменной принадлежит пространству* S (Лорана Шварца*)), если она комплекснозначна ($\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, φ_1, φ_2 действительны), бесконечно дифференцируема на действительной оси и для любой пары неотрицательных чисел l, k (k целое)

$$\sup_x (1 + |x|^l)|\varphi^{(k)}(x)| = \varkappa(l, k, \varphi) < \infty. \tag{1}$$

Из этого определения следует, что производная $\varphi^{(k)}(x)$ при любом k ограничена, стремится к нулю при $x \to \infty$ и принадлежит L'_p ($1 \leqslant p < \infty$), потому что $|\varphi^{(k)}(x)| \leqslant \frac{\varkappa(2, k, \varphi)}{1 + |x|^2}$. Заметим, что всякая бесконечно дифференцируемая финитная функция, очевидно, принадлежит S.

Если функции φ_m, $\varphi \in S$ ($m = 1, 2, \ldots$), и для любой указанной пары (l, k)

$$\varkappa(l, k, \varphi_m - \varphi) \to 0 \quad (m \to \infty),$$

то будем писать $\varphi_m \to \varphi$ (S) и говорить, что φ_m *стремится к* φ *в смысле* (S) (*в топологии* (S)).

*) Л. Шварц — французский математик.