равную

$$f'(x)=\widehat{it\tilde{f}}(x) \qquad (1)$$

(*коротко* $f'=\widehat{it\tilde{f}}$).

Доказательство. Так как $f\in L'$, то функция $\tilde{f}$ всюду непрерывна. Далее из того, что $t\tilde{f}\in L'$, следует, что $\tilde{f}\in L'$ $(|t|\geqslant 1)$, но тогда $\tilde{f}\in L'=L'(-\infty,\infty)$,

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(u)\,e^{ixu}\,du \qquad (2)$$

и

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}iu\tilde{f}(u)\,e^{ixu}\,du. \qquad (3)$$

Дифференцирование под знаком интеграла законно, потому что в силу неравенства

$$|iu\tilde{f}(u)e^{-ixu}|\leqslant|u\tilde{f}(u)|\in L'$$

интеграл (3) равномерно сходится относительно x и, кроме того, подынтегральная функция в (3) непрерывна по x, u. Теорема доказана.

§ 16.6. Пространство S

По определению функция $\varphi=\varphi(x)$ *от одной переменной принадлежит пространству* S (Лорана Шварца*)), если она комплекснозначна ($\varphi=\varphi_1+i\varphi_2$, φ_1, φ_2 действительны), бесконечно дифференцируема на действительной оси и для любой пары неотрицательных чисел l, k (k целое)

$$\sup_x(1+|x|^l)|\varphi^{(k)}(x)|=\varkappa(l,k,\varphi)<\infty. \qquad (1)$$

Из этого определения следует, что производная $\varphi^{(k)}(x)$ при любом k ограничена, стремится к нулю при $x\to\infty$ и принадлежит L'_p $(1\leqslant p<\infty)$, потому что $|\varphi^{(k)}(x)|\leqslant\frac{\varkappa(2,k,\varphi)}{1+|x|^2}$. Заметим, что всякая бесконечно дифференцируемая финитная функция, очевидно, принадлежит S.

Если функции φ_m, $\varphi\in S$ ($m=1,2,\ldots$), и для любой указанной пары (l,k)

$$\varkappa(l,k,\varphi_m-\varphi)\to 0 \quad (m\to\infty),$$

то будем писать $\varphi_m\to\varphi$ (S) и говорить, что φ_m *стремится к* φ *в смысле* (S) (*в топологии* (S)).

*) Л. Шварц — французский математик.

Нам придется иметь дело с *операциями* $A\varphi=\psi$, приводящими в соответствие каждой функции $\varphi\in S$ некоторую функцию $\psi\in S$. Очевидно, S — *линейное множество.*

Операция A называется *линейной*, если

$$A(\alpha\varphi_1+\beta\varphi_2)=\alpha A\varphi_1+\beta A\varphi_2,$$

каковы бы ни были комплексные числа α, β и функции φ_1, $\varphi_2\in S$.

Операция A называется *непрерывной*, если, какова бы ни была последовательность функций $\varphi_k\in S$, сходящаяся к некоторой функции $\varphi\in S$ в смысле (S), имеет место

$$A\varphi_k\to A\varphi \quad (S).$$

Следующее утверждение может служить достаточным*) критерием непрерывности линейной операции: *если, какова бы ни была пара* (l, k) (*неотрицательных целых чисел*), *найдется зависящая от нее система пар* $(l_1, k_1), \ldots, (l_m, k_m)$ *такая, что*

$$\varkappa(l, k, A\varphi)\leqslant C_{l,k}\sum_{j=1}^{m}\varkappa(l_j, k_j, \varphi)$$

для всех $\varphi\in S$, *где* $C_{l,k}$ *не зависит от* φ, *то операция* A *непрерывна.*

В самом деле, если $\varphi_\nu\to\varphi(S)$, то для любой пары (l, k)

$$\varkappa(l, k, A(\varphi_\nu-\varphi))\leqslant C_{l,k}\sum_{j=1}^{m}\varkappa(l_j, k_j; \varphi_\nu-\varphi)\to 0 \qquad (\nu\to\infty).$$

Операция дифференцирования $\varphi^{(\mu)}$ μ *раз функции* φ *отображает* S *в* S *линейно. Она также непрерывна*, потому что

$$\varkappa(l, k, \varphi^{(\mu)})=\varkappa(l, k+\mu, \varphi)$$

для любой пары (l, k).

Про функцию $\lambda=\lambda(x)$, бесконечно дифференцируемую на $(-\infty, \infty)$, будем говорить, что она (вместе со своими производными) имеет *полиномиальный рост*, если для любого целого неотрицательного k найдется неотрицательное число $l(k)=l$ и такая константа C, что

$$|\lambda^{(k)}(x)|\leqslant C(1+|x|^l).$$

Например, функция $(ix)^s$, где s — неотрицательное целое, очевидно, бесконечно дифференцируема и имеет полиномиальный рост.

Произведение $\lambda\varphi=\lambda(x)\varphi(x)$ есть *линейная непрерывная операция, отображающая* S в S. Тот факт, что она отображает S

*) На самом деле этот критерий является также необходимым, но мы здесь это не будем доказывать.

в S, и ее непрерывность вытекают из неравенств

$$(1+|x|^l)\,|(\lambda\varphi)^{(k)}| = (1+|x|^l)\left|\sum_{j=0}^{k} C_k^j \lambda^{(j)} \varphi^{(k-j)}\right| \leqslant$$
$$\leqslant C\sum_0^k \frac{|\lambda^{(j)}(x)|}{1+|x|^{l(j)}}(1+|x|^{l(j)})(1+|x|^l)\,|\varphi^{(k-j)}(x)| \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \sum_0^k \left(1+|x|^{l+l(j)}\right)|\varphi^{(k-j)}|,$$

из которых следует

$$\varkappa(l,\,k,\,\lambda\varphi) \leqslant C_1 \sum_0^k \varkappa(l+l(j),\,k-j,\,\varphi).$$

Линейность операции $\lambda\varphi$ очевидна.

Покажем, что *преобразование Фурье*

$$\widetilde{\varphi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \varphi(t)\,e^{-ixt}\,dt \quad \left(\int = \int_{-\infty}^{\infty}\right) \tag{2}$$

есть линейная непрерывная операция, отображающая S на S и притом взаимно однозначно.

В самом деле, если $\varphi \in S$, то $\varphi \in L'$, и преобразование $\widetilde{\varphi}$ есть во всяком случае непрерывная функция. Далее,

$$\widetilde{\varphi}^{(k)}(x) = \int \psi(t)\,e^{-ixt}dt, \tag{3}$$
$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\varphi(t)(-it)^k = A\varphi.$$

При этом $\psi(t) \in S$ как произведение функции $\varphi \in S$ на бесконечно дифференцируемую функцию полиномиального роста. Так как $\psi \in L'$, то интеграл (3) при любом k равномерно сходится и дифференцирование (2) по x под знаком интеграла законно. Имеем, интегрируя по частям,

$$\widetilde{\varphi}^{(k)}(x) = \int \psi(t)\,e^{-ixt}dt = \frac{1}{ix}\int \psi'(t)\,e^{-ixt}dt = \ldots =$$
$$= \frac{1}{(ix)^l}\int \psi^{(l)}(t)\,e^{-ixt}dt,$$

потому что $\psi^{(s)}(t) \to 0$ $(t \to \pm\infty)$.

Но тогда

$$|x|^l\,|\widetilde{\varphi}^{(k)}(x)| \leqslant \int \frac{|\psi^{(l)}(t)|\,(1+t^2)}{1+t^2}dt \leqslant \varkappa(2,\,l,\,\psi)\int\frac{dt}{1+t^2} = c\varkappa(2,l,\psi).$$

В частности, $|\widetilde{\varphi}^{(k)}(x)| \leqslant c\varkappa(2,\,0,\,\psi)$ и потому

$$\varkappa(l,\,k,\,\widetilde{\varphi}) = \sup\,(1+|x|^l)\widetilde{\varphi}^{(k)}(x)| \leqslant c(\varkappa(2,\,l,\,A\varphi) + \varkappa(2,\,0,\,A\varphi)).$$

Следовательно, $\tilde{\varphi}\in S$ и $\tilde{\varphi}$ непрерывно зависит от $A\varphi$. Но $A\varphi$ непрерывно зависит от φ, и потому $\tilde{\varphi}$ непрерывно зависит от $\varphi\in S$. Линейность операции $\tilde{\varphi}$ очевидна. Мы пока доказали, что она отображает S в S. Но если χ — произвольная функция из S, то в силу того, что она гладкая и принадлежит L', ее можно рассматривать как преобразование Фурье от $\hat{\chi}\in S$. Это показывает, что на самом деле преобразование $\tilde{\varphi}$ отображает S *на* S. Наконец, из равенства $\tilde{\varphi}_1=\tilde{\varphi}_2$ $(\varphi_1, \varphi_2\in S)$ следует $\widetilde{\varphi_1-\varphi_2}=0$ и $\varphi_1-\varphi_2=\hat{0}=0$, т. е. $\varphi_1=\varphi_2$, что показывает, что операция $\tilde{\varphi}$ отображает S на S взаимно однозначно.

Для двух функций $\varphi, \psi\in S$ введем выражение

$$(\varphi, \psi)=\int\varphi(x)\,\psi(x)\,dx$$

(без знака сопряжения над ψ!).

Справедливо (см. лемму 1 § 16.2)

$$(\varphi, \tilde{\psi})=\int\varphi(x)\,\tilde{\psi}(x)\,dx=\int\varphi(x)\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\int\psi(t)\,e^{-ixt}dt=$$
$$=\int\psi(t)\,dt\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\varphi(x)\,e^{-ixt}dx=(\psi, \tilde{\varphi})=(\tilde{\varphi}, \psi),$$

и мы получили *первое из равенств*

$$(\varphi, \tilde{\psi})=(\tilde{\varphi}, \psi), \quad (\varphi, \hat{\psi})=(\hat{\varphi}, \psi), \tag{4}$$

являющихся аналогами равенства Парсеваля в теории рядов Фурье *). Второе равенство доказывается аналогично.

Отметим еще равенства

$$(\varphi', \psi)=\int\varphi'(t)\,\psi(t)\,dt=\varphi(t)\,\psi(t)\Big|_{-\infty}^{\infty}-\int\varphi(t)\,\psi'(t)\,dt=-(\varphi, \psi')$$
$$(\varphi, \psi\in S), \tag{5}$$

ведь $\varphi(t)$, $\psi(t)\to 0$ при $t\to\pm\infty$. Наконец, еще отметим важные равенства

$$\varphi'(x)=\widehat{it\tilde{\varphi}}=\widetilde{(-it)\hat{\varphi}} \quad (\varphi\in S). \tag{6}$$

Надо учесть, что если $\varphi\in S$, то $\tilde{\varphi}\in S$, и так как ix — бесконечно дифференцируемая функция полиномиального роста, то $ix\tilde{\varphi}\in S$. Но тогда φ, $ix\varphi\in L'$ и законно применить теорему § 16.5. Второе равенство (6) доказывается аналогично.

Для функций $\varphi\in S$, очевидно, верны утверждения 1)—5) в конце § 16.4 (упражнения).

---

*) Если бы мы считали, что $(\varphi, \psi)=\int\varphi(x)\overline{\psi(x)}\,dx$, то тогда было бы $(\varphi, \tilde{\psi})=(\hat{\varphi}, \psi)$.

Пусть $K \in L'$ (или L), а $\varphi \in S$. Операция

$$K * \varphi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int K(x-t)\,\varphi(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \varphi(x-t)\,K(t)\,dt = \varphi * K$$

называется *сверткой функций* K *и* φ (*или* φ *и* K). Справедливы важные равенства

$$\widehat{\widetilde{K}\widetilde{\varphi}} = \widetilde{\widehat{K}\widehat{\varphi}} = K * \varphi \quad (K \in L',\ \varphi \in S), \tag{7}$$

потому что, например (пояснения ниже),

$$\widehat{\widetilde{K}\widetilde{\varphi}} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{ixs} ds \int K(u)\, e^{-isu} du \int \varphi(v)\, e^{-isv} dv =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{ixs} ds \int K(u)\, du \int \varphi(v)\, e^{-is(u+v)} dv =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{ixs} ds \int K(u)\, du \int \varphi(\xi-u)\, e^{-s\xi i} d\xi =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{ixs} ds \int e^{-is\xi} d\xi \int K(u)\, \varphi(\xi-u)\, du =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int K(u)\, \varphi(x-u)\, du.$$

Первый член в этой цели имеет смысл, потому что $\varphi \in S$, $\widetilde{\varphi} \in S \in L'$, $K \in L'$, $\widetilde{K}$ — ограниченная непрерывная функция, и потому $\widetilde{K}\widetilde{\varphi} \in L'$ — непрерывная функция. В третьем равенстве произведена замена v на $\xi = u + v$, в четвертом интегралы по u и ξ мы поменяли местами (см. лемму 1 § 16.2 или теорему Фубини). Последнее пятое равенство верно, потому что интеграл

$$\varkappa(\xi) = \int K(u)\, \varphi(\xi-u)\, du$$

есть функция, принадлежащая L',— ведь

$$\int |\varkappa(\xi)|\, d\xi \leqslant \int d\xi \int |K(u)|\, |\varphi(\xi-u)|\, du = \int |\varphi(t)|\, dt \int |K(u)|\, du < \infty,$$

и имеющая непрерывную производную

$$\varkappa'(\xi) = \int K(u)\, \varphi'(\xi-u)\, du$$

(интеграл равномерно сходится!).

Имеем далее

$$\widetilde{\widehat{K}\widehat{\varphi}} = \widetilde{K}(-t)\,\widetilde{\varphi}(-t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \widetilde{K}(-t)\,\widetilde{\varphi}(-t)\, e^{-ixt} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \widetilde{K}(u)\, \widetilde{\varphi}(u)\, e^{ixu} du = \widehat{\widetilde{K}\widetilde{\varphi}}.$$

Упражнения. Показать, что следующие функции принадлежат S:

$$1.\ e^{-x^2}.\quad 2.\ \psi(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}}, & |x|<1 \quad (\text{см. § 5.11, (8)}).\\ 0, & |x|\geqslant 1\end{cases}$$

§ 16.7. Пространство S' обобщенных функций

Если каждой функции $\varphi\in S$ в силу некоторого закона приведено в соответствие число (F, φ), зависящее от φ линейно и непрерывно (в смысле S), то говорят, что этим определен *линейный функционал или обобщенная функция F над S.*

Функционал F обладает следующими двумя свойствами:

1) F — линейный функционал, т. е. для любой пары α, β комплексных чисел и пары функций φ, $\psi\in S$

$$(F, \alpha\varphi+\beta\psi)=\alpha(F, \varphi)+\beta(F, \psi),$$

2) F — непрерывный функционал:

$$(F, \varphi_N)\to(F, \varphi)\quad (\text{если } \varphi_N\to\varphi)\ (S).$$

Совокупность всех указанных функционалов (обобщенных функций) F принято обозначать через S'.

Обычно не представляет труда установить, что конкретный функционал (F, φ) над S является линейным. Что же касается непрерывности, то здесь очень важным является следующий достаточный критерий *).

Пусть найдется константа C и конечная система пар $(k_1, l_1), \ldots, (k_m, l_m)$ такая, что выполняется неравенство

$$|(F, \varphi)|\leqslant C\sum_{j=1}^{m}\varkappa(l_j, k_j, \varphi) \tag{1}$$

для всех функций $\varphi\in S$. Тогда функционал (F, φ) непрерывен, потому что из того, что $\varphi_N\to\varphi$ (S), следует

$$|(F, \varphi_N)-(F, \varphi)|=|(F, \varphi_N-\varphi)|\leqslant$$
$$\leqslant C\sum_{j=1}^{m}\varkappa(l_j, k_j, \varphi_N-\varphi)\to 0\quad (N\to\infty).$$

Рассмотрим пример. Пусть $F(x)$ есть локально интегрируемая, определенная на действительной оси комплекснозначная функция такая, что для нее можно указать число $l\geqslant 0$, для которого $|F(x)|\leqslant C(1+|x|^l)$, где C не зависит от x. Интеграл

$$(F, \varphi)=\int F(x)\varphi(x)\,dx\qquad \left(\varphi\in S,\ \int=\int_{-\infty}^{\infty}\right) \tag{2}$$

*) Можно доказать, что этот критерий также и необходим.