Упражнения. Показать, что следующие функции принадлежат S:

$$1.\ e^{-x^2}. \quad 2.\ \psi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}}, & |x| < 1 \quad (\text{см. § 5.11, (8)}). \\ 0, & |x| \geqslant 1 \end{cases}$$

§ 16.7. Пространство S' обобщенных функций

Если каждой функции $\varphi \in S$ в силу некоторого закона приведено в соответствие число (F, φ), зависящее от φ линейно и непрерывно (в смысле S), то говорят, что этим определен *линейный функционал или обобщенная функция F над S.*

Функционал F обладает следующими двумя свойствами:

1) F — линейный функционал, т. е. для любой пары α, β комплексных чисел и пары функций $\varphi, \psi \in S$

$$(F, \alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha(F, \varphi) + \beta(F, \psi),$$

2) F — непрерывный функционал:

$$(F, \varphi_N) \to (F, \varphi) \quad (\text{если } \varphi_N \to \varphi)\ (S).$$

Совокупность всех указанных функционалов (обобщенных функций) F принято обозначать через S'.

Обычно не представляет труда установить, что конкретный функционал (F, φ) над S является линейным. Что же касается непрерывности, то здесь очень важным является следующий достаточный критерий *).

Пусть найдется константа C и конечная система пар $(k_1, l_1), \ldots, (k_m, l_m)$ такая, что выполняется неравенство

$$|(F, \varphi)| \leqslant C \sum_{j=1}^{m} \varkappa(l_j, k_j, \varphi) \tag{1}$$

для всех функций $\varphi \in S$. Тогда функционал (F, φ) непрерывен, потому что из того, что $\varphi_N \to \varphi$ (S), следует

$$|(F, \varphi_N) - (F, \varphi)| = |(F, \varphi_N - \varphi)| \leqslant$$
$$\leqslant C \sum_{j=1}^{m} \varkappa(l_j, k_j, \varphi_N - \varphi) \to 0 \quad (N \to \infty).$$

Рассмотрим пример. Пусть $F(x)$ есть локально интегрируемая, определенная на действительной оси комплекснозначная функция такая, что для нее можно указать число $l \geqslant 0$, для которого $|F(x)| \leqslant C(1 + |x|^l)$, где C не зависит от x. Интеграл

$$(F, \varphi) = \int F(x)\,\varphi(x)\,dx \qquad \left(\varphi \in S,\ \int = \int_{-\infty}^{\infty}\right) \tag{2}$$

*) Можно доказать, что этот критерий также и необходим.

есть функционал (обобщенная функция) $F \in S'$. В самом деле, ведь

$$|(F\varphi)| \leqslant \int |F(x)\varphi(x)|\,dx \leqslant C\int \frac{1+|x|^l}{1+|x|^{l+2}}\varkappa(l+2, 0, \varphi)\,dx \leqslant$$
$$\leqslant C_1\varkappa(l+2, 0, \varphi),$$

откуда видно, что функционал (2) определен для всех $\varphi \in S$ и непрерывен. Линейность его очевидна.

Равенство (2) определяет функционал $F \in S'$ также в случаях, когда функция $F(x) \in L'_p$ (или L_p), $1 \leqslant p < \infty$. Если $F(x) \in \in L'$, то непрерывность (F, φ) следует из неравенств $|(F, \varphi)| \leqslant \leqslant \int |F(x)\varphi(x)|\,dx \leqslant \int |F(x)|\,\varkappa(0, 0, \varphi)\,dx \leqslant C\varkappa(0, 0, \varphi)$, а если $F(x) \in L'_p\,(1<p<\infty)$, то из неравенств

$$|(F, \varphi)| \leqslant \int |F(x)\varphi(x)| \leqslant \int |F(x)|\frac{1}{1+|x|}\varkappa(1, 0, \varphi)\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int |F|^p dx\right)^{1/p}\left(\int \frac{dx}{(1+|x|)^q}\right)^{1/q}\varkappa(1, 0, \varphi) = C\varkappa(1, 0, \varphi)\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right).$$

Важно отметить, что *для того чтобы две локально интегрируемые (в римановом смысле) функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ представляли при помощи равенств вида* (2) *равные обобщенные функции $F_1 = F_2 \subset S'$, необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство $F_1(x) = F_2(x)$ во всех точках непрерывности $F_1(x)$* и *$F_2(x)$.*

Достаточность условия очевидна. Оно также необходимо, потому что если имеет место равенство

$$\int F_1(x)\varphi(x)\,dx = \int F_2(x)\varphi(x)\,dx \text{ для всех } \varphi \in S, \tag{3}$$

и при этом допустить, например, что в некоторой точке x_0 непрерывности функций F_1 и F_2 имеет место

$$\psi(x_0) = F_1(x_0) - F_2(x_0) > 0,$$

то найдется интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, на котором

$$\psi(x) > \eta > 0.$$

Но существует неотрицательная функция $\varphi \in S$ с носителем на $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ (например, функция $\psi((x - x_0)/\delta)$ в упражнении 2 § 16.6). Для нее имеет место

$$(F_1, \varphi) - (F_2, \varphi) = \int \psi(x)\varphi(x)\,dx > \eta \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \varphi(x)\,dx > 0,$$

и мы пришли к противоречию с (3).

Более общее утверждение (см. § 19.6, теорема 1) гласит: *две локально интегрируемые в лебеговом смысле функции, если представляют, то один и тот же линейный функционал тогда и только тогда, когда на любом конечном отрезке $[a, b]$ они равны между собой, за исключением множества лебеговой меры нуль.*

Обобщенную функцию, представляемую при помощи интеграла (2) обычной локально интегрируемой функцией $F(x)$, отождествляют с этой последней. Например, $\sin x$, $(\sin x)/x$, e^{-x^2}, $\ln|x|$, $\sum\limits_0^n a_k x$, — это обычные функции, но и обобщенные, принадлежащие S'.

С другой стороны, функция e^{x^2} не принадлежит S' (не представляет при помощи интеграла (2) линейный функционал на (S)), потому что для нее, например, не существует интеграл (2) при $\varphi(x) = e^{-x^2} \in S$.

Пример 1. Функционал

$$\delta = (\delta, \varphi) = \varphi(0) \qquad (\varphi \in S) \tag{4}$$

называется *δ-функцией (дельта-функцией)*. Очевидно, $\delta \in S'$, ведь

$$|\varphi(0)| \leqslant \sup_x |\varphi(x)| = \varkappa(0, 0, \varphi).$$

Не существует локально интегрируемой функции, которая представляла бы δ-функцию. В этом смысле δ есть подлинная (не обычная) обобщенная функция.

В самом деле, допустим вопреки утверждению, что такая локально интегрируемая функция $F(x)$ существует, и пусть $x_0 \neq 0$ есть ее точка непрерывности, где $F(x_0) > 0$. Тогда на некотором не содержащем нуль интервале $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ выполнялось бы неравенство $F(x) > \eta > 0$ и можно было бы подобрать неотрицательную функцию $\varphi \in S$ с носителем $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, откуда

$$(F, \varphi) = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} F(x)\,\varphi(x)\,dx > \eta \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \varphi(x)\,dx > 0.$$

Но этого не может быть, потому что для функции φ с носителем, не содержащим точку 0, функционал $(\delta, \varphi) = \varphi(0) = 0$. Итак, наша функция $F(x)$ не может быть положительной в ее точках непрерывности, отличных от нулевой.

Аналогично доказывается, что $F(x)$ не может быть отрицательной в таких точках, и тогда, очевидно,

$$\int F(x)\,\varphi(x)\,dx = 0 \text{ для всех } \varphi \in S.$$

Но это невозможно, ведь имеются же функции $\varphi \in S$, для которых $\varphi(0) \neq 0$.

Можно доказать более общее утверждение: *функционал (4) не представляется в виде интеграла (2), где $F(x)$ — какая-либо локально интегрируемая в лебеговом смысле функция.*

Однако функционал (δ, φ) можно записать в виде *интеграла Стилтьеса* *)

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, d\theta(x) = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int_a^b \varphi(x)\, d\theta(x),$$

где

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

— функция, которую еще называют *функцией Хевисайда*.

По определению

$$\int_a^b \varphi(x)\, d\theta(x) = \lim_{\max(x_j - x_{j-1}) \to 0} \sum_1^N \varphi(\xi_j)\,[\theta(x_j) - \theta(x_{j-1})],$$

где отрезок $[a, b]$ разделен на части точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ и $x_{j-1} \leqslant \xi_j \leqslant x_j$ $(j = 1, \ldots, N)$. Очевидно, если нулевая точка $x = 0$ принадлежит отрезку $[x_{l-1}, x_l]$ и не является его правым концом, то

$$\sum_1^N \varphi(\xi_j)\,[\theta(x_j) - \theta(x_{j-1})] = \varphi(\xi_l)\,[\theta(x_l) - \theta(x_{l-1})] =$$
$$= \varphi(\xi_l) \to \varphi(0) \;\; (\max|x_j - x_{j-1}| \to 0).$$

Если же точка 0 есть правый конец $[x_{l-1}, x_l]$, то наша сумма равняется $\varphi(\xi_{l+1}) \to \varphi(0)$, что дает тот же результат.

Пример 2. Обобщенная функция $\mathrm{P}.\,\frac{1}{x}$ определяется как предел

$$\left(\mathrm{P}.\,\frac{1}{x}, \varphi\right) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \left\{\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx\right\} = \mathrm{V.\,P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx \;\; (\varphi \in S), \qquad (5)$$

т. е. интеграл справа в (5) понимается в смысле главного значения (V. P.— vales principal — главное значение). В обычном римановом (и лебеговом) смысле этот интеграл в случае, если $\varphi(0) \neq 0$, не существует. С другой стороны, предел (5) можно записать в виде обычного риманового (несобственного) интеграла $(\varphi(x) - \varphi(-x) = O(x),\ x \to 0)$

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \left\{\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx\right\} =$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\, dx = \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\, dx.$$

*) Т. И. Стилтьес (1856—1894) — голландский математик.

Ясно, что этот функционал линейный. Непрерывность же его вытекает из неравенства

$$\left|\int_0^\infty \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,dx\right| = \left|\int_0^1 \frac{\int_{-x}^{x}\varphi'(t)\,dt}{x}\,dx + \int_1^\infty \frac{x[\varphi(x)-\varphi(-x)]}{x^2}\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \frac{2x\varkappa(0,1,\varphi)}{x}\,dx + \int_1^\infty \frac{2\varkappa(1,0,\varphi)}{x^2}\,dx < C\,[\varkappa(0,1,\varphi)+\varkappa(1,0,\varphi)].$$

Введем ряд важных операций над обобщенными функциями.

Если $\lambda=\lambda(x)$ есть *бесконечно дифференцируемая функция полиномиального роста, то произведение ее на обобщенную функцию $F\in S'$ записывается в виде $\lambda F=\lambda(x)F(x)$ и определяется при помощи равенства*

$$(\lambda F,\ \varphi)=(F,\ \lambda\varphi). \tag{6}$$

Это определение корректно, ведь $\lambda\varphi$ есть операция, непрерывная относительно $\varphi\in S$, а $(F,\ \lambda\varphi)$ есть функционал, непрерывный относительно $\lambda\varphi$, следовательно, и относительно φ. Линейность $(F,\ \lambda\varphi)$ по φ очевидна.

Это определение также естественно, потому что, если функционал $F\in S'$ представляется локально интегрируемой функцией $F(x)$, то функция $\lambda(x)F(x)$ тоже, очевидно, представляет функционал $\lambda F\in S'$ и

$$(\lambda F,\varphi)=\int\lambda(x)\,F(x)\,\varphi(x)\,dx=\int F(x)\,\lambda(x)\,\varphi(x)\,dx=(F,\lambda\varphi).$$

Производная от обобщенной функции $F\in S'$ по определению есть обобщенная функция F', определяемая равенством

$$(F',\ \varphi)=-(F,\ \varphi')\quad(\varphi\in S). \tag{7}$$

Так как $\varphi'\in S$ и есть непрерывная относительно φ операция и так как $(F,\ \varphi')$ есть непрерывный функционал относительно φ', то $(F',\ \varphi)$ есть непрерывный функционал относительно φ. Линейность его очевидна.

Определение (7) естественно, потому что, если, например, функция $F(x)$ непрерывна вместе со своей производной и $F,\ F'\in L'$, то

$$(F',\varphi)=\int F'(x)\,\varphi(x)\,dx=F(x)\,\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{\infty}-\int F(x)\,\varphi'(x)\,dx=$$
$$=-(F,\varphi').$$

Ведь $F(x),\ \varphi(x)\to 0\ (x\to\infty)$, так как, например,

$$F(x')-F(x)=\int_x^{x'}F'(t)\,dt\to 0\quad(x,\ x'\to\infty)$$

и существует $\lim_{x\to\infty} F(x)$, который не может быть отличным от нуля, потому что $F \in L'$.

Очевидно, что любая обобщенная функция $F \in S'$ имеет производную (обобщенную) какого угодно порядка, определяемую по индукции $F^{(k)} = (F^{(k-1)})'$. Таким образом,

$$(F^{(k)}, \varphi) = (-1)^k (F, \varphi^{(k)}).$$

Например,

$$\left(\delta^{(k)}, \varphi\right) = (-1)^k \left(\delta, \varphi^k\right) = (-1)^k \varphi^{(k)}(0) \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

$$(\theta', \varphi) = -(\theta, \varphi') = -\int_0^\infty \varphi'(t)\, dt = \varphi(0),$$

т. е. $\theta' = \delta$.

По определению последовательность обобщенных функций $F_N \in S'$ $(N = 1, 2, \ldots)$ сходится к функции $F \in S'$ $(F_N \to F(S'))$, если *)

$$\lim_{N\to\infty} (F_N, \varphi) = (F, \varphi) \quad \text{для всех } \varphi \in S. \tag{8}$$

Отсюда автоматически следует также, что последовательность производных F_N' сходится к производной F', потому что

$$\left(F_N', \varphi\right) = -(F_N, \varphi') \to -(F, \varphi') = (F', \varphi), \quad N \to \infty.$$

Можно рассматривать *ряд*

$$F = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots \tag{9}$$

функций $u_k \in S'$, имеющий своей *суммой функцию* $F \in S'$, что надо понимать в том смысле, что

$$\sum_1^N u_k \to F(S'), \quad N \to \infty.$$

Из сказанного, очевидно, следует, что ряд (9) можно почленно дифференцировать:

$$F' = u_1' + u_2' + u_3' + \ldots$$

Пример 3. Рассмотрим обычную функцию

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon}, & 0 < x < \varepsilon, \\ 0, & x \notin (0, \varepsilon), \end{cases}$$

зависящую от параметра $\varepsilon > 0$. Она есть в то же время и обобщенная функция f_ε.

*) Можно доказать, что если последовательность функций $F_N \in S'$ такова, что для любой $\varphi \in S$ последовательность чисел (F_N, φ) удовлетворяет условию Коши, то существует, и притом единственная, функция $F \in S'$, для которой выполняется (8).

Очевидно,

$$(f_\varepsilon, \varphi) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon \varphi(x)\,dx \to \varphi(0), \quad \varepsilon \to 0 \quad (\text{для всех } \varphi \in S),$$

откуда следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon = \delta \quad (S').$$

Преобразованием (*соответственно обратным преобразованием*) *Фурье обобщенной функции* $F \in S'$ называется обобщенная функция $\widetilde{F}(\widehat{F})$, определяемая равенством

$$(\widetilde{F}, \varphi) = (F, \widetilde{\varphi}) \quad ((\widehat{F}, \varphi) = (F, \widehat{\varphi})) \quad (\varphi \in S). \tag{10}$$

Это определение корректно: $\widetilde{\varphi} \in S$ и непрерывно зависит от φ, а $(F, \widetilde{\varphi})$ непрерывно зависит от φ, поэтому и от φ; линейность $(F, \widetilde{\varphi})$ по φ очевидна. Оно естественно, так как согласуется, например, с равенством $(\widetilde{\varphi}, \psi) = (\varphi, \widetilde{\psi})$ для $\varphi, \psi \in S$. Далее, $\widehat{\widetilde{F}} = F$, так как $(\widehat{\widetilde{F}}, \varphi) = (\widetilde{F}, \widehat{\varphi}) = (F, \widetilde{\widehat{\varphi}}) = (F, \varphi)$.

Преобразование $\widetilde{F}(\widehat{F})$ *непрерывно зависит от* $F \in S'$. Это значит, что если последовательность $F_N \in S'$ сходится к $F \in S'$ $(F_N \to F(S'))$, то и $\widetilde{F}_N$ сходится к $\widetilde{F}$ $(\widetilde{F}_N \to \widetilde{F}(S'))$. В самом деле,

$$(\widetilde{F}_N, \varphi) = (F_N, \widetilde{\varphi}) \to (F, \widetilde{\varphi}) = (\widetilde{F}, \varphi), \quad N \to \infty.$$

Отметим еще, что *преобразование* $\widetilde{F}(\widehat{F})$ *отображает* S' *на* S' *взаимно однозначно*. То, что имеет место отображение S' в S', мы уже знаем, но если $\Phi \in S'$ — произвольная обобщенная функция, то ее можно представить в виде $\Phi = \widetilde{\widehat{\Phi}}$, что доказывает, что на самом деле наше преобразование отображает S' на S'. Наконец, если $F_1, F_2 \in S'$ и $\widetilde{F}_1 = \widetilde{F}_2$, то $\widetilde{F_1 - F_2} = 0$, $F_1 - F_2 = \widehat{0} = 0$ и $F_1 = F_2$, что показывает взаимную однозначность отображения.

Из (10) следует

$$F' = \widehat{ix\widetilde{F}} = \widetilde{-ix\widehat{F}}, \tag{11}$$

потому что, например (см. § 16.6, (6)),

$$(\widetilde{-ix\widehat{F}}, \varphi) = (-ix\widehat{F}, \widetilde{\varphi}) = (\widehat{F}, -ix\widetilde{\varphi}) = (F, \widehat{-ix\widetilde{\varphi}}) = \\ = -(F, \varphi') = (F', \varphi).$$

Из (11) легко следует по индукции общая формула для производной k-го порядка

$$F^{(k)} = \widehat{(ix)^k\widetilde{F}} = \widetilde{(-ix)^k\widehat{F}} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{12}$$

Если $K \in S'$ есть обобщенная функция, преобразование $\widehat{K}$ которой есть обычная функция и притом бесконечно дифференцируемая полиномиального роста, то корректно определяется свертка K с произвольной функцией $F \in S'$ при помощи равенства

$$K * F = \widehat{\widetilde{K}\widetilde{F}} = \widetilde{\widehat{K}\widehat{F}}. \tag{13}$$

Это определение пересекается с введенным в предыдущем параграфе определением свертки.

Пример 4. $\widetilde{\delta} = \widehat{\delta} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$, потому что, например,

$$(\widetilde{\delta}, \varphi) = (\delta, \widetilde{\varphi}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \varphi(t)\, dt.$$

Следовательно,

$$\delta^{(k)} = \widetilde{(-ix)^k \widehat{\delta}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widetilde{(-ix)^k 1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widetilde{(-ix)^k} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

поэтому

$$F^{(k)} = \widetilde{(-ix)^k \widehat{F}} = \sqrt{2\pi}\, \widetilde{\widehat{\delta^{(k)}} \widehat{F}} = \sqrt{2\pi}\, (\delta^{(k)} * F).$$

Пример 5. Имеем (пояснения ниже)

$$(\widehat{\operatorname{sign} x}, \varphi) = (\operatorname{sign} x, \widehat{\varphi}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \operatorname{sign} u\, du \int e^{iut} \varphi(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty du \int \varphi(t) \left(e^{iut} - e^{-iut}\right) dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, i \lim_{N \to \infty} \int \varphi(t)\, dt \int_0^N \sin ut\, du =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, i \lim_{N \to \infty} \int \varphi(t) \frac{1 - \cos Nt}{t}\, dt =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, i \lim_{N \to \infty} \int_0^\infty [\varphi(t) - \varphi(-t)] \frac{1 - \cos Nt}{t}\, dt =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, i \int_0^\infty \frac{\varphi(t) - \varphi(-t)}{t}\, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, i \operatorname{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t}\, dt, \tag{14}$$

и мы получили формулу

$$\widehat{\operatorname{sign} x} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, i \operatorname{V.P.} \frac{1}{t}. \tag{15}$$

Функция $\operatorname{sign} x$ — локально интегрируемая и ограниченная и, следовательно, принадлежит S', поэтому имеет смысл первый член цепи (14), а вместе с ним второй и третий. При переходе к пятому члену изменен порядок интегрирования (при конечном N, см. § 13.15). При переходе к предпоследнему члену заметим, что

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^\infty \frac{\varphi(t)-\varphi(-t)}{t}\cos Nt\,dt=0,$$

потому что гладкая функция $(\varphi(t)-\varphi(-t))/t\in L'(0,\infty)$. Последний член записан в виде сингулярного интеграла в смысле главного значения.

Отметим еще, что если $F(x)\in S'$ и $a\neq 0$ — действительное число, то обобщенные функции $F(a-x)$ и $F(ax)$ определяются при помощи равенств

$$(F(a-x),\ \varphi(x))=(F(x),\ \varphi(a-x)),\ (F(ax),\ \varphi(x))=$$
$$=|a|^{-1}(F(x),\ \varphi(x/a)).$$

Корректность этих определений следует из того, что операция перехода от $\varphi(x)\in S$ к $\varphi(x-a)$ или $\varphi(x/a)$ непрерывна в смысле (S), а естественность легко выясняется на обычных локально интегрируемых функциях $F(x)$, являющихся в то же время обобщенными.

Упражнения. Доказать, что

1. $\dfrac{1}{\pi}\dfrac{\sin Nx}{x}\xrightarrow[N\to\infty]{}\delta(x)\quad(S)$. 2. $\dfrac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}e^{-x^2/\varepsilon^2}\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}\delta(x)\quad(S)$.

Указание. Интеграл $\dfrac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/\varepsilon^2}\varphi(x)\,dx$ представить в виде суммы I_1+I_2 интегралов по областям $|x|<1$ и $|x|>1$. В первом интеграле положить $\varphi(x)=\varphi(0)+\psi(x)$ и учесть, что $|\psi(x)|\leqslant c|x|$, во втором учесть, что $\varphi(x)$ ограничена ($|\varphi(x)|\leqslant M$).

3. $\dfrac{1}{x\pm i\varepsilon}\to\mp i\pi\delta(x)+\mathrm{P.}\dfrac{1}{x},\quad\varepsilon\to 0(S)$.

Указание. $\left(\mathrm{P.}\dfrac{1}{x},\ \varphi(x)\right)=\mathrm{V.\,P.}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx$ (см. (5)).

Если $F\in S'$, то

4. $\widetilde{F}(-x)=\widehat{F}(x)$. 5. $\widetilde{F}(-x)=\widehat{F}(x)$.

6. $\widetilde{F(ax)}=\dfrac{1}{|a|}\widetilde{F}\left(\dfrac{x}{a}\right)$. 7. $\widehat{F(ax)}=\dfrac{1}{|a|}\widehat{F}\left(\dfrac{x}{a}\right)\quad(a\neq 0)$.

8. $\widehat{e^{i\mu t}\widetilde{F}}=\widetilde{e^{-i\mu t}\widehat{F}}=F(x+\mu)$ (μ — действительное; учесть, что $e^{i\mu t}$ — бесконечно дифференцируемая функция полиномиального роста).

9. Доказать, что функция $P(x)f(x)\in S'$, если $P(x)=\sum\limits_0^n a_kx^k$ — произвольный многочлен степени n, а $f(x)\in L_p'$ (или L_p, $1\leqslant p<\infty$), или если $f(x)$ — локально интегрируемая ограниченная функция.