§ 16.8. Многомерные интегралы Фурье и обобщенные функции

Пусть $R_n = R$ есть n-мерное пространство точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\Delta_N = \Delta_N^{(n)} = \{ |x_j| \leqslant N;\ j = 1, \ldots, n\}$ $(N > 0)$ — принадлежащий ему куб.

На R зададим локально интегрируемую, вообще говоря, комплекснозначную функцию $f(\mathbf{x})$ (т. е. $f \in L'(\Delta_N)$ или $f \in L(\Delta_N)$ при любом N). Для нее имеют смысл интегралы

$$\tilde{f}^N(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\Delta_N} f(\mathbf{u})\, e^{-i\mathbf{x}\mathbf{u}} d\mathbf{u},$$

$$\hat{f}^N(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\Delta_N} f(\mathbf{u})\, e^{i\mathbf{x}\mathbf{u}} d\mathbf{u} \qquad \left(\mathbf{x}\mathbf{u} = \sum_1^n x_j u_j\right), \tag{1}$$

представляющие собой непрерывные функции от $\mathbf{x}$ (см. лемму § 16.2 и замечание 1 к ней), стремящиеся к нулю, когда $|\mathbf{x}|^2 = \sum_1^n x_j^2 \to \infty$ (см. ниже теорему 1).

Преобразованием Фурье f, соответственно *обратным преобразованием Фурье* назовем функции:

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) = \lim_{N \to \infty} \tilde{f}^N(\mathbf{x}), \quad \hat{f}(\mathbf{x}) = \lim_{N \to \infty} \hat{f}^N(\mathbf{x}). \tag{2}$$

Эти пределы иногда рассматриваются в смысле среднего квадратического $\left(\|\tilde{f} - \tilde{f}^N\|_{L_2} \to 0,\ N \to \infty \right)$.

Теорема 1. *Если $f \in L' = L'(R)$ (или $L = L(R)$), то пределы (2) существуют в обычном смысле и определяют непрерывные ограниченные функции $\tilde{f}(\mathbf{x})$, $\hat{f}(\mathbf{x})$, обладающие свойством*

$$\lim_{|x| \to \infty} \tilde{f}(\mathbf{x}) = \lim_{|x| \to \infty} \hat{f}(\mathbf{x}) = 0.$$

Доказательство. Непрерывность и ограниченность $\tilde{f}$, $\hat{f}$ следует из леммы § 16.2 и замечания 1 к ней. Далее, если $\mathbf{e}_k$ есть единичный вектор, направленный по оси x_k, то (см. § 14.4, теорема 6)

$$|(2\pi)^{n/2}\tilde{f}(\mathbf{x})| = \frac{1}{2}\left| \int f(\mathbf{u})\, e^{-i\mathbf{x}\mathbf{u}} d\mathbf{u} + \int f\left(\mathbf{u} + \frac{\pi \mathbf{e}_k}{x_k}\right) e^{-i(\mathbf{x}\mathbf{u} + \pi)} d\mathbf{u} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \int \left| f\left(\mathbf{u} + \frac{\pi \mathbf{e}_k}{x_k}\right) - f(\mathbf{u}) \right| d\mathbf{u} \to 0 \quad (x_k \to \infty).$$

Если же $|\mathbf{x}^2| = \sum_1^n x_k^2 \to \infty$, то $\max_k |x_k| \to \infty$ и $\tilde{f}(\mathbf{x}) \to 0$, но тогда и $\hat{f}(\mathbf{x}) = \tilde{f}(-\mathbf{x}) \to 0$. $\left(\int = \int\limits_{R_n}\right)$.

Простым интегралом Фурье функции $f \in L'$ (или L) называется функция

$$S_N(\mathbf{x}) = \hat{f}^N =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\Delta_N} e^{i\mathbf{x}\mathbf{v}} d\mathbf{v} \int f(\mathbf{u}) e^{-i\mathbf{v}\mathbf{u}} d\mathbf{u} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int f(\mathbf{u})\, d\mathbf{u} \int_{\Delta_N} e^{i\mathbf{v}(\mathbf{x}-\mathbf{u})} d\mathbf{v} =$$
$$= \frac{1}{\pi^n} \int \prod_{j=1}^{n} \frac{\sin N(x_j - u_j)}{x_j - u_j} f(\mathbf{u})\, d\mathbf{u} = \frac{1}{\pi^n} \int \prod_{j=1}^{n} \frac{\sin N u_j}{u_j} f(\mathbf{x}+\mathbf{u})\, d\mathbf{u}. \tag{3}$$

Изменение порядка интегрирования следует из леммы § 16.2 и замечания 1 к ней.

При достаточно общих условиях, налагаемых на свойства функции f (см., например, ниже §§ 16.9, 16.10), можно утверждать, что

$$f(\mathbf{x}) = \lim S_N(\mathbf{x}) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\Delta_N} e^{i\mathbf{x}\mathbf{v}} d\mathbf{v} \int f(\mathbf{u}) e^{-i\mathbf{v}\mathbf{u}} d\mathbf{u} =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i\mathbf{x}\mathbf{v}} d\mathbf{v} \int f(\mathbf{u}) e^{-i\mathbf{v}\mathbf{u}} d\mathbf{u}, \tag{4}$$

где внешний интеграл понимается вообще в сингулярном смысле (утверждается существование предела при $N \to \infty$ для областей Δ_N, а не каких-либо других).

Таким образом, при определенных условиях, налагаемых на f, справедливы равенства

$$f(\mathbf{x}) = \hat{\tilde{f}}(\mathbf{x}) = \tilde{\hat{f}}(\mathbf{x}). \tag{5}$$

Дальнейшие факты излагаются в двумерном случае. На n-мерный случай они распространяются очевидным образом.

Пусть $f(x)$ и $\varphi(y)$ — локально интегрируемые функции от одной переменной, т. е. принадлежащие $L'(\Delta_N^{(1)})(L(\Delta_N^{(1)}))$ при любом N $(\Delta_N^{(1)} = (-N, N))$. Тогда, очевидно,

$$f(x)\varphi(y) \in L'(\Delta_N^{(2)}),\ \Delta_N^{(2)} = \{|x|, |y| < N\} = \Delta_N^{(1)} \times \Delta_N^{(1)}$$

и

$$\widetilde{f\varphi}^N(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Delta_N^{(2)}} f(u)\varphi(v) e^{-i(xu+yv)} du\, dv =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Delta_N^{(1)}} f(u) e^{-ixu} du \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Delta_N^{(1)}} \varphi(v) e^{-iyv} dv = \tilde{f}^N(x)\tilde{\varphi}^N(y). \tag{6}$$

Поэтому, если

$$\widetilde{f}^N(x)\to\widetilde{f}(x),\quad \widetilde{\varphi}^N(y)\to\widetilde{\varphi}(y)\quad (N\to\infty), \tag{7}$$

то

$$\widetilde{f}(x)\widetilde{\varphi}(y)=\widetilde{f\varphi}(x,\ y). \tag{8}$$

При этом, если соотношения (7) имеют место в метрике L_2, то и соотношение (8) имеет место в метрике L_2:

$$\|\widetilde{f}(x)\widetilde{\varphi}(y)-\widetilde{f\varphi}^N\|_{L_2(R_2)}=\|\widetilde{f}(x)\widetilde{\varphi}(y)-\widetilde{f}^N(x)\widetilde{\varphi}^N(y)\|_{L_2(R_2)}\leqslant$$
$$\leqslant\|\widetilde{f}(x)(\widetilde{\varphi}(y)-\widetilde{\varphi}^N(y))\|_{L_2(R_2)}+\|(\widetilde{f}(x)-\widetilde{f}^N(x))\widetilde{\varphi}^N(y)\|_{L_2(R_2)}=$$
$$=\|\widetilde{f}\|_{L_2(R_1)}\|\widetilde{\varphi}-\widetilde{\varphi}^N\|_{L_2(R_1)}+\|\widetilde{f}-\widetilde{f}^N\|_{L_2(R_1)}\|\widetilde{\varphi}^N\|_{L_2(R_1)}\to 0\quad (N\to\infty).$$

Из сказанного следует, что если функции $f(x)$, $\varphi(y)$ таковы, что

$$f(x)=\widehat{\widetilde{f}}(x)=\widetilde{\widehat{f}}(x),\quad \varphi(y)=\widehat{\widetilde{\varphi}}(y)=\widetilde{\widehat{\varphi}}(y)$$

в смысле обычной сходимости или в среднем, то в том же смысле

$$\widehat{\widetilde{f\varphi}}(x,\ y)=\widehat{\widetilde{f}}(x)\widehat{\widetilde{\varphi}}(y)=f(x)\varphi(y)=\widetilde{\widehat{f\varphi}}(x,\ y).$$

Рассматривая снова n-мерный случай, будем говорить, что функция $\varphi(\mathbf{x})\in S$, если она комплекснозначна, бесконечно дифференцируема на $R=R_n$ и такова, что для любой пары целого числа $l\geqslant 0$ и целочисленного вектора $\mathbf{k}=(k_1,\ \ldots,\ k_n)\geqslant\mathbf{0}$ $(k_j\geqslant 0)$

$$\sup_x(1+|\mathbf{x}|^l)|\varphi^{(k)}(\mathbf{x})|=\varkappa(l,\mathbf{k},\varphi)<\infty\qquad\left(|\mathbf{x}|=\left(\sum_1^n x_j^2\right)^{1/2}\right).$$

Так как при любом указанном $\mathbf{k}$

$$|\varphi^{(k)}(\mathbf{x})|\leqslant\frac{\varkappa(n+1,\mathbf{k},\varphi)}{1+|x|^{n+1}},$$

то, очевидно, частная производная $\varphi^{(k)}$ — ограниченная функция, принадлежащая к $L_p(R)$ $(1\leqslant p<\infty)$.

Если функции φ_m, $\varphi\in S$ $(m=1,\ 2,\ \ldots)$ и для любой (указанной) пары $(l,\ \mathbf{k})$

$$\varkappa(l,\mathbf{k};\ \varphi_m-\varphi)\to 0\ (m\to\infty),$$

то будем писать $\varphi_m\to\varphi(S)$ и говорить, что φ_m *стремится к* φ *в топологии* (S) (в смысле (S)).

Операция $A\varphi$, отображающая S в S, называется *линейной*, если $A(\alpha\varphi+\beta\psi)=\alpha A\varphi+\beta A\psi$, где φ, $\psi\in S$ и α, β — комплексные числа, и *непрерывной*, если из $\varphi_N\to\varphi$ (S) следует $A\varphi_N\to A\varphi$ (S).

Для того чтобы линейная операция $A\varphi$ была непрерывной, достаточно), чтобы для любой пары $(l, \mathbf{k})$ существовала константа $C_{l,\mathbf{k}}$ и зависящая от $(l, \mathbf{k})$ конечная система пар $(l_j, \mathbf{k}^j)$ $(j = 1, \ldots, m)$, так что*

$$\varkappa(l, \mathbf{k}, A\varphi) \leqslant C_{l,\mathbf{k}} \sum_{j=1}^{m} \varkappa(l_j, \mathbf{k}^j, \varphi) \quad (\text{для всех } \varphi \in S),$$

потому что, если $\varphi_\nu \to \varphi(S)$, то

$$\varkappa(l, \mathbf{k}, A(\varphi_\nu - \varphi)) \leqslant C_{l,\mathbf{k}} \sum_{j=1}^{m} \varkappa(l_j, \mathbf{k}^j, \varphi_\nu - \varphi) \to 0 \quad (\nu \to \infty).$$

Важными линейными непрерывными операциями $A\varphi(\varphi \in S$, $A\varphi \in S)$ являются:

1) Операция взятия производной от φ

$$\varphi^{(\mu)} = \frac{\partial^{|\mu|}\varphi}{\partial x_1^{\mu_1} \ldots \partial x_n^{\mu_n}} \left(|\mu| = \sum_1^n \mu_j \right).$$

Ведь

$$\varkappa(l, \mathbf{k}, \varphi^{(\mu)}) = \varkappa(l, \mathbf{k} + \mu, \varphi).$$

2) Операция умножения φ на бесконечно дифференцируемую функцию $\lambda(\mathbf{x})$ полиномиального роста $(\lambda\varphi = \lambda(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}))$, т. е. такую, что для любого $\mathbf{k}$ (целого неотрицательного) найдется целое число $l(\mathbf{k})$, для которого

$$|\lambda^{(\mathbf{k})}(\mathbf{x})| \leqslant C(1 + |\mathbf{x}|^{l(\mathbf{k})}),$$

где C не зависит от $\mathbf{x}$. Ведь

$$\left|(1 + |\mathbf{x}|^l)(\lambda\varphi)^{(\mathbf{k})}\right| = (1 + |\mathbf{x}|^l)\left|\sum_{0 \leqslant \mathbf{s} \leqslant \mathbf{k}} C_{\mathbf{k}}^{\mathbf{s}} \lambda^{(\mathbf{s})} \varphi^{(\mathbf{k}-\mathbf{s})}\right| \leqslant$$
$$\leqslant C \sum_{0 \leqslant \mathbf{s} \leqslant \mathbf{k}} (1 + |\mathbf{x}|^l)(1 + |\mathbf{x}|^{l(\mathbf{s})}) |\varphi^{(\mathbf{k}-\mathbf{s})}| \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \sum_{0 \leqslant \mathbf{s} \leqslant \mathbf{k}} \varkappa(l + l(\mathbf{s}), \mathbf{k} - \mathbf{s}, \varphi),$$

$$C_{\mathbf{k}}^{\mathbf{s}} = \frac{\mathbf{k}!\,(\mathbf{k} - \mathbf{s})!}{\mathbf{s}!} = \frac{k_1! \ldots k_n!(k_1 - s_1)! \ldots (k_n - s_n)!}{s_1! \ldots s_n!}.$$

3) Операции преобразования Фурье $\widetilde{\varphi}$ и обратного преобразования Фурье $\overset{\frown}{\varphi}$.

Если учесть, что $(\varphi \in S)$

$$\widetilde{\varphi} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \varphi(\mathbf{u}) e^{-i\mathbf{x}\mathbf{u}} d\mathbf{u} =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{-ix_1u_1} du_1 \ldots \int e^{-ix_nu_n} \varphi(\mathbf{u})\, du_n = \overset{1\sim \ldots n\sim}{\varphi}, \tag{9}$$

---

*) На самом деле не только достаточно, но и необходимо.

где $j\sim$ — знак операции преобразования Фурье только по переменной x_j, то непрерывность операции $\sim$ сводится к непрерывности операций $j\sim$ $(j=1, \ldots, n)$.

Покажем, что линейная *операция* $^j\widetilde{\varphi}$ *отображает* S *на* S *непрерывно и взаимно однозначно.*

Ограничимся при доказательстве двумерным случаем:

$$\psi(x, y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\varphi(t, y)\,e^{-ixt}dt \qquad (\varphi(x, y)\in S).$$

Положив (пояснения ниже)

$$g(t, y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-it)^{k_1}\frac{\partial\varphi^{k_2}}{\partial y^{k_2}}(t, y),$$

получим (интегрируя по частям)

$$\frac{\partial^{k_1+k_2}\psi}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}}=\int g(t, y)\,e^{-ixt}dt=\frac{1}{ix}\int\frac{\partial g}{\partial x}(t, y)\,e^{-ixt}dt=\ldots$$

$$\ldots=\frac{1}{(ix)^l}\int\frac{\partial^l g}{\partial x^l}(t, y)\,e^{-ixt}dt. \qquad (10)$$

Так как t^{k_1}— бесконечно дифференцируемая функция полиномиального роста ($k_1\geqslant 0$ — целое!), то $g(t, y)\in S$ и непрерывно (в смысле (S)) зависит от φ. Поэтому, в частности, $g(t, y)\to 0$ $(t\to\pm\infty)$, откуда следует цепочка равенств (10).

Из (10) следует

$$\left|x^l\frac{\partial^{k_1+k_2}\psi}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}}\right|\leqslant\int\frac{dt}{1+t^2}\,\varkappa(2; l, 0; g)\leqslant C\varkappa(2; l, 0; g),$$

и потому (применив (10) еще при $l=0$) получим

$$(1+|x|^l)\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}\psi}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}}\right|\leqslant C_1(\varkappa(2; 0, 0; g)+\varkappa(2; l, 0; g)),$$

следовательно, ψ непрерывно (в смысле (S)) зависит от g, но тогда вместе с g — и от φ.

Если $\psi(x, y)\in S$ — произвольная функция, то $^x\widehat{\psi}\in S$ и $\psi=$ $^{x\sim}(^x\widehat{\psi})$, и операция $x\sim$ отображает S не только *в*, но и *на* S.

Наконец, из равенства $^x\widetilde{\varphi}_1={}^x\widetilde{\varphi}_2$ следует $^x(\widetilde{\varphi_1-\varphi_2})=0$, откуда $\varphi_1-\varphi_2={}^x\widehat{0}=0$, и мы доказали взаимную однозначность, осуществляемую отображением $^x\widetilde{\varphi}$ (S на S).

Теперь из (9) следует, что и *операция* $\widetilde{\varphi}$ *отображает* S *на* S *взаимно однозначно и непрерывно.*

Отметим, что любые две из операций

$$1\sim, \ldots, n\sim, 1\wedge, \ldots, n\wedge$$

перестановочны между собой. *Для всякой функции* $\varphi \in S$ *имеют место равенства*

$$\varphi = \widetilde{\widehat{\varphi}} = \widehat{\widetilde{\varphi}} \tag{11}$$

в любой точке $x \in R$. Например, в двумерном случае $\varphi(x, y)$

$$\widetilde{\widehat{\varphi}} = {}^{x\wedge y\wedge y\sim x\sim}\varphi = {}^{x\wedge x\sim}\varphi = \varphi.$$

Отметим на примере функции $\varphi(x, y)$ двух переменных еще следующий факт:

$$\widehat{\lambda(x)\,\widetilde{\varphi}(x, y)} = {}^{x}\widehat{\lambda(x)\,{}^{x\sim}\varphi(x, y)}, \tag{12}$$

где $\lambda(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция полиномиального роста. В самом деле,

$$\widehat{\lambda(x)\,\widetilde{\varphi}} = \widehat{\lambda(x)\,{}^{y\sim x\sim}\varphi} = {}^{y\sim}\left(\widehat{\lambda(x)\,{}^{x\sim}\varphi}\right) = {}^{x}\widehat{\lambda(x)\,{}^{x\sim}\varphi},$$

ведь, например, $x\wedge y\wedge y\sim \, = x\wedge$.

Имеют также место равенства ($\varphi, \psi \in S$)

$$(\widetilde{\varphi}, \psi) = (\varphi, \widetilde{\psi}), \quad (\varphi, \psi) = \int_R \varphi(\mathbf{t})\,\psi(\mathbf{t})\,d\mathbf{t}^{*}), \tag{13}$$

$$\left(\varphi^{(\mathbf{k})}, \psi\right) = (-1)^{|\mathbf{k}|}\left(\varphi, \psi^{(\mathbf{k})}\right), \tag{14}$$

$$\varphi^{(\mathbf{k})}(\mathbf{x}) = \widehat{(i\mathbf{x})^{\mathbf{k}}\widetilde{\varphi}} = \widetilde{(-ix)^{\mathbf{k}}\widehat{\varphi}} \quad \left((ix)^{\mathbf{k}} = |\,i\,|^{|\mathbf{k}|}x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n}\right), \tag{15}$$

$$\widehat{\widetilde{K}\widetilde{\varphi}} = \widetilde{\widehat{K}\widehat{\varphi}} = K*\varphi = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int K(\mathbf{u})\,\varphi(\mathbf{x}-\mathbf{u})\,d\mathbf{u} \quad (K \in L' \text{ или } L). \tag{16}$$

Они обобщают соответствующие равенства § 16.6, (4), (5), (6), (7) и доказывается аналогично.

Над S строится *пространство* S' *обобщенных функций* n переменных аналогично соответствующему одномерному пространству.

Таким образом, *обобщенной функцией* $F \in S'$ называется линейный непрерывный функционал (F, φ) $(\varphi \in S)$.

Для того чтобы линейный функционал (F, φ) *был непрерывным, достаточно, чтобы нашлась зависящая от него система пар* $(l_1, \mathbf{k}^1), \ldots, (l_m, \mathbf{k}^m)$ *и константа* C *такие, что* (см. § 16.7, (1))

$$|(F, \varphi)| \leqslant C \sum_{j=1}^{m} \varkappa\left(l_j, \mathbf{k}^l, \varphi\right) \quad (\text{для всех } \varphi \in S).$$

Функция $F(\mathbf{x}) \in L_p'$ (или L_p) $(1 \leqslant p < \infty)$ или локально интегрируемая функция $F(\mathbf{x})$ полиномиального роста $(|F(\mathbf{x})| \leqslant C(1 + |\mathbf{x}^l|)$

---

*) Функция ψ под знаком интеграла здесь взята без знака сопряжения.

при некотором l) представляет обобщенную функцию

$$(F, \varphi) = \int F(\mathbf{x})\, \varphi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \quad \left(\int = \int\limits_{R_n}, \ \varphi \in S\right),$$

и при этом две такие функции, отличающиеся хотя бы в одной точке их непрерывности (или в лебеговом случае на множестве положительной меры), представляют разные обобщенные функции, что доказывается, как в случае одной переменной, но с помощью функции $\psi(|(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)/\delta)|)$ от n переменных (см. ниже упражнение 1).

Функционал $(\delta, \varphi) = \varphi(0)$ есть n-мерная δ-функция — обобщенная функция от $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, не представляемая локально интегрируемой функцией. Операции λF, где λ — бесконечно дифференцируемая функция полиномиального роста (вместе со своими производными!), $F^{(k)}$, $\widetilde{F}$, $\widehat{F}$, ${}^j\widetilde{F}$, ${}^j\widehat{F}$ определяется при помощи равенств:

$$(\lambda F, \varphi) = (F, \lambda\varphi), \ (F^{(k)}, \varphi) = (-1)^{|\mathbf{k}|}(F, \varphi^{(\mathbf{k})}),$$

$$(\widetilde{F}, \varphi) = (F, \widetilde{\varphi}), \ (\widehat{F}, \varphi) = (F, \widehat{\varphi}), \ ({}^j\widetilde{F}, \varphi) = (F, {}^j\widetilde{\varphi}) \ ({}^j\widehat{F}\varphi) = (F, {}^j\widehat{\varphi}),$$

откуда, в частности, следует

$$F^{(\mathbf{k})} = \widehat{(i\mathbf{x})^{\mathbf{k}}\widetilde{F}} = \widetilde{(-i\mathbf{x})^{(\mathbf{k})}\widehat{F}}.$$

Сходимость $F_N \to F(S')$ понимается в том смысле, что $(F_N, \varphi) \to (F, \varphi)(N \to \infty)$ для всех $\varphi \in S$. Наконец, как в одномерном случае, вводится свертка

$$K * F = \widehat{\widetilde{K}\widetilde{F}} = \widetilde{\widehat{K}\widehat{F}} \quad (F \in S'),$$

где $K \in S'$ и при этом $\widetilde{K}$ — бесконечно дифференцируемая функция полиномиального роста (см. еще § 18.3).

Двумерный простой интеграл Фурье для функции $f(x, y) \in L' = L'(R_2)$ (или $L(R_2)$) и для любого $\eta > 0$ может быть записан в виде

$$S_N(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \int\int\limits_{K_\eta} \frac{\sin Nu}{u} \frac{\sin Nv}{v} f(x+u, y+v)\, du\, dv + o(1) \quad (N \to \infty), \tag{17}$$

где K_η — η-крест, т. е. множество точек (u, v), удовлетворяющих одному из неравенств

$$|u| < \eta, \ |v| < \eta.$$

Это следует из соотношения

$$\int\limits_\eta^\infty \int\limits_\eta^\infty \frac{\sin Nu}{u} \frac{\sin Nv}{v} f(x+u, y+v)\, du\, dv \to 0 \quad (N \to \infty),$$

представляющего собой простое обобщение леммы 1 § 15.4 на двумерный случай, и подобных соотношений для интегралов, распространенных на области, симметричные $\{\eta \leqslant x,\ y\}$ относительно осей координат и нулевой точки $(0, 0)$.

Подчеркнем, что в (17) нельзя заменить крест K_η на квадрат

$$\Delta_\eta = \{|u|,\ |v| \leqslant \eta\}.$$

В этом существенное отличие многомерного случая от одномерного. В то время как в одномерном случае сходимость в точке x простого интеграла Фурье функции $f \in L'(L_1)$ или суммы Фурье периодической функции $f \in L'^*\ (L^*)$ всецело зависит от поведения f в любой малой окрестности x, в двумерном (многомерном) случае это уже не так: функция $f \in L'\ (L'^*)$ может быть равна нулю в окрестности точки (x, y), но ее простой интеграл (или сумма Фурье) может не сходиться при $N \to \infty$ к $f(x, y)$.

Чтобы пояснить, от чего зависит это явление, введем множество $C_0(\Delta')$ всевозможных непрерывных финитных функций $f(u, v)$ с носителем, принадлежащим к прямоугольнику

$$\Delta' = \{0 < u < \eta,\quad \eta < v < 2\eta,\quad \eta > 0\},$$

с нормой

$$\|f\|_{C_0(\Delta')} = \max_{(u,v)\in\Delta'} |f(u, v)|.$$

Каждой функции $f \in C_0(\Delta')$ приведем в соответствие ее простой интеграл

$$S_N(f) = S_N(f, 0, 0) = \frac{1}{\pi^2} \iint_{\Delta'} \frac{\sin Nu}{u} \frac{\sin Nv}{v} f(u, v)\, du\, dv$$

в точке $(0, 0)$.

Верхняя грань этого интеграла, распространенная на всевозможные функции $f \in C_0(\Delta')$ с $\|f\| \leqslant 1$, равна

$$\Lambda_N = \sup S_N(f, 0, 0) =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \iint_{\Delta'} \left| \frac{\sin Nu}{u} \frac{\sin Nv}{v} \right| du\, dv = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{N\eta} \left| \frac{\sin u}{u} \right| du \cdot \int_{\eta N}^{2\eta N} \left| \frac{\sin v}{v} \right| dv.$$

Легко доказать, что

$$\Lambda_N \to \infty, \qquad N \to \infty$$

(воспользоваться рассуждениями теоремы 3 § 9.15).

С точки зрения функционального анализа Λ_N есть норма функционала $S_N(f, 0, 0)$, определенного в пространстве $C_0(\Delta')$. Из того, что $\Lambda_N \to \infty$, следует (как это доказывается в функциональном анализе) существование функции $f \in C_0(\Delta')$ такой, что для нее функционал $S_N(f, 0, 0)$ неограничен (на множестве $N = 1, 2, \ldots$).

Упражнения.

1. Доказать, что

$$\left(|\mathbf{x}|^2 = \sum_1^n x_j^2\right) e^{-|\mathbf{x}|^2} \in S, \quad \psi\left(\left|\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}^0}{\delta}\right|\right) \in S$$

($\delta > 0$, см. упражнение 2 § 16.6).

2. Показать, что $\widehat{f(\mathbf{x}+\mu)} = e^{i\mu t}\widetilde{f} = e^{-i\mu t}\widehat{f}$ $\left(\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n),\ t = (t_1 \ldots t_n),\ \mu t = \sum_1^n \mu_j t_j\right)$.

3. Показать, что верхняя грань сумм Фурье $S_n(f, 0)$, порядка n в точке $x = 0$, распространенная на все функции $f \in C_*$ от одной переменной с $\|f\|_{C_*} \leqslant 1$, равна

$$\sup_{\|f\|_{C_*} \leqslant 1} |S_n(f, 0)| = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |D_n(t)|\, dt \to \infty, \quad n \to \infty,$$

где $D_n(t)$ — ядро Дирихле. Отсюда в силу упомянутой выше теоремы функционального анализа следует существование функции $f \in C_*$, ряд Фурье которой в точке $x = 0$ расходится.

§ 16.9. Ступенчатые финитные функции. Квадратические приближения

Рассмотрим сначала простейшую ступенчатую финитную функцию ($\delta > 0$) от одной переменной

$$\varphi_{a,\delta}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (a-\delta, a+\delta), \\ 0, & x \notin [a-\delta, a+\delta], \\ \frac{1}{2}, & x = a-\delta, a+\delta. \end{cases} \tag{1}$$

Ее преобразование Фурье равно

$$\widetilde{\varphi}_{a,\delta}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a-\delta}^{a+\delta} e^{-ixt} dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-ixa} \frac{e^{ix\delta} - e^{-ix\delta}}{2ix} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-ixa} \frac{\sin x\delta}{x}, \tag{2}$$

и потому, учитывая, что $\varphi_{a,\delta} \in L'$ есть локально кусочно гладкая функция, получим

$$\varphi_{a,\delta}(x) = \widehat{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-ixa} \frac{\sin x\delta}{x}}. \tag{3}$$

Функция $\varphi_{a,\delta}$ принадлежит, очевидно, L_2'. Из формулы (2) также видно, что $\widetilde{\varphi}_{a,\delta}$ не принадлежит L', но принадлежит L_2' (вообще L_p', $1 < p < \infty$) и при этом

$$\|\varphi_{a,\delta}\|_{L_2}^2 = 2\delta,$$

$$\|\widehat{\varphi}_{a,\delta}\|_{L_2}^2 = \|\widetilde{\varphi}_{a,\delta}\|_{L_2}^2 = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x\delta}{x}\right)^2 dx = 2\delta$$