2. Показать, что $\widehat{f(\mathbf{x}+\boldsymbol{\mu})} = e^{i\boldsymbol{\mu}\mathbf{t}}\widetilde{f} = e^{-i\boldsymbol{\mu}\mathbf{t}}\widehat{f}$ $\left(\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n),\ \mathbf{t} = (t_1 \ldots t_n),\ \boldsymbol{\mu}\mathbf{t} = \sum_1^n \mu_j t_j\right)$.

3. Показать, что верхняя грань сумм Фурье $S_n(f, 0)$, порядка n в точке $x = 0$, распространенная на все функции $f \in C_*$ от одной переменной с $\|f\|_{C_*} \leqslant 1$, равна

$$\sup_{\|f\|_{C_*} \leqslant 1} |S_n(f, 0)| = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |D_n(t)|\,dt \to \infty, \quad n \to \infty,$$

где $D_n(t)$ — ядро Дирихле. Отсюда в силу упомянутой выше теоремы функционального анализа следует существование функции $f \in C_*$, ряд Фурье которой в точке $x = 0$ расходится.

§ 16.9. Ступенчатые финитные функции. Квадратические приближения

Рассмотрим сначала простейшую ступенчатую финитную функцию ($\delta > 0$) от одной переменной

$$\varphi_{a,\delta}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (a-\delta, a+\delta), \\ 0, & x \notin [a-\delta, a+\delta], \\ \frac{1}{2}, & x = a-\delta,\ a+\delta. \end{cases} \tag{1}$$

Ее преобразование Фурье равно

$$\widetilde{\varphi}_{a,\delta}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{a-\delta}^{a+\delta} e^{-ixt}\,dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-ixa}\,\frac{e^{ix\delta} - e^{-ix\delta}}{2ix} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-ixa}\,\frac{\sin x\delta}{x}, \tag{2}$$

и потому, учитывая, что $\varphi_{a,\delta} \in L'$ есть локально кусочно гладкая функция, получим

$$\varphi_{a,\delta}(x) = \widehat{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-ixa}\,\frac{\sin x\delta}{x}}. \tag{3}$$

Функция $\varphi_{a,\delta}$ принадлежит, очевидно, L_2'. Из формулы (2) также видно, что $\widetilde{\varphi}_{a,\delta}$ не принадлежит L', но принадлежит L_2' (вообще L_p', $1 < p < \infty$) и при этом

$$\|\varphi_{a,\delta}\|_{L_2}^2 = 2\delta,$$

$$\|\widehat{\varphi}_{a,\delta}\|_{L_2}^2 = \|\widetilde{\varphi}_{a,\delta}\|_{L_2}^2 = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin x\delta}{x}\right)^2 dx = 2\delta$$

(см. § 15.9, (9)). Таким образом, справедливы равенства

$$\|\varphi_{a,\delta}\|_{L_2} = \|\tilde{\varphi}_{a,\delta}\|_{L_2} = \|\hat{\varphi}_{a,\delta}\|_{L_2}. \tag{4}$$

Мы увидим, что они имеют место для всех функций $\varphi \in L_2$.

В силу определения (см. § 16.4) операций $\sim, \wedge, \sim N, \wedge N$ и того факта, что $\varphi_{a,\delta} \in L'$ — локально кусочно гладкая функция, справедливы соотношения

$$\begin{gathered}\tilde{\varphi}^N_{a,\delta}(x) \to \tilde{\varphi}_{a,\delta}(x)\ (N \to \infty)\\ \hat{\tilde{\varphi}}^N_{a,\delta}(x) \to \varphi_{a,\delta}(x)\end{gathered} \tag{5}$$

для любого действительного x.

Важно отметить, что имеет место не только поточечная сходимость, но и сходимость в метрике $L_2 = L_2(-\infty, \infty)$, т. е.

$$\|\tilde{\varphi}^N_{a,\delta} - \tilde{\varphi}_{a,\delta}\|_{L_2} \to 0 \ (N \to \infty), \tag{6}$$

$$\|\hat{\tilde{\varphi}}^N_{a,\delta} - \varphi_{a,\delta}\|_{L_2} \to 0. \tag{7}$$

Соотношение (6) тривиально, потому что для достаточно больших N отрезок $[a-\delta, a+\delta]$ принадлежит к $[-N, N]$, откуда

$$\tilde{\varphi}_{a,\delta}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} \varphi_{a,\delta}(t)\, e^{-ixt}\, dt = \tilde{\varphi}^N_{a,\delta}(x).$$

Более сложно доказывается (7). Имеем

$$\hat{\tilde{\varphi}}^N_{a,\delta}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{a-\delta}^{a+\delta} \frac{\sin N(t-x)}{t-x}\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{N(a-\delta-x)}^{N(a+\delta-x)} \frac{\sin z}{z}\, dz =$$

$$= 1 - \frac{1}{\pi} \int_{N(a+\delta-x)}^{\infty} \frac{\sin z}{z}\, dz - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{N(a-\delta-x)} \frac{\sin z}{z}\, dz,$$

потому что

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin z}{z}\, dz = 1.$$

Поэтому, учитывая (1), получим

$$\sqrt{\int_{\infty}^{\infty} \left|\varphi_{a,\delta}(x) - \hat{\tilde{\varphi}}^N_{a,\delta}(x)\right|^2 dx} \leqslant I_1 + I_2 + I_3 + I_4, \tag{8}$$

где

$$I_1=\left(\int\limits_{a-\delta}^{a+\delta}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{N(a+\delta-x)}^{\infty}\frac{\sin z}{z}\,dz\right)^2 dx\right)^{1/2},$$

$$I_2=\left(\int\limits_{a-\delta}^{a+\delta}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{N(a-\delta-x)}\frac{\sin z}{z}\,dz\right)^2 dx\right)^{1/2},$$

$$I_3=\left(\int\limits_{-\infty}^{a-\delta}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{N(a-\delta-x)}^{N(a+\delta-x)}\frac{\sin z}{z}\,dz\right)^2 dx\right)^{1/2},$$

$$I_4=\left(\int\limits_{a+\delta}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{N(a-\delta-x)}^{N(a+\delta-x)}\frac{\sin z}{z}\,dz\right)^2 dx\right)^{1/2}.$$

Полагая $u=N(a+\delta-x)$, получим

$$(\pi I_1)^2=\frac{1}{N}\int\limits_0^{2\delta N}du\left(\int\limits_u^{\infty}\frac{\sin z}{z}\,dz\right)^2.$$

Но

$$\int\limits_u^{\infty}\frac{\sin z}{z}\,dz=-\frac{\cos z}{z}\Big|_u^{\infty}-\int\limits_u^{\infty}\frac{\cos z}{z^2}\,dz;$$

поэтому

$$\left|\int\limits_u^{\infty}\frac{\sin z}{z}\,dz\right|\leqslant\frac{1}{u}+\frac{1}{u}=\frac{2}{u}.$$

Этой оценкой воспользуемся для $u>1$. Для $u<1$ нам будет достаточно принять во внимание, что

$$\left|\int\limits_u^{\infty}\frac{\sin z}{z}\,dz\right|<K,$$

где K — константа, не зависящая от u. Тогда из (9) следует, что

$$(\pi I_1)^2\leqslant\frac{1}{N}\left(\int\limits_0^1 K^2\,du+\int\limits_1^{\infty}\frac{4\,du}{u^2}\right)\leqslant\frac{C}{N}\to 0\quad(N\to\infty).$$

По аналогии доказывается, что

$$I_2\to 0\qquad(N\to\infty).$$

Далее (подстановка $u = N(x - a - \delta)$ и затем $z = -z'$)

$$(\pi I_4)^2 = \frac{1}{N}\int_0^\infty du\left(\int_{-u-2N\delta}^{-u}\frac{\sin z}{z}\,dz\right)^2 = \frac{1}{N}\int_0^\infty du\left(\int_u^{u+2N\delta}\frac{\sin z}{z}\,dz\right)^2.$$

Поэтому

$$(\pi I_4)^2 \leqslant \frac{1}{N}\left(\int_0^1 (2K)^2\,dz + \int_1^\infty \frac{4}{z^2}\,dz\right) < \frac{C_1}{N} \to 0 \quad (N \to \infty).$$

Аналогично доказывается, что

$$I_3 \to 0 \quad (N \to \infty).$$

Этим соотношение (7) доказано.

Конечно, в (5), (6), (7) можно поменять местами $\sim$ и $\wedge$.

Отметим, что если интервалы $(a - \delta,\ a + \delta)$ и $(b - \sigma,\ b + \sigma)$ не пересекаются, то наряду с очевидным равенством

$$\int \varphi_{a,\delta}(x)\,\varphi_{b,\sigma}(x)\,dx = 0$$

справедливы также следующие важные равенства:

$$\int \tilde{\varphi}_{a,\delta}(x)\,\bar{\tilde{\varphi}}_{b,\sigma}(x)\,dx = \int \hat{\varphi}_{a,\delta}\bar{\hat{\varphi}}_{b,\sigma}\,dx = 0.$$

В самом деле, $\tilde{\varphi}_{a,\delta}$, $\tilde{\varphi}_{b,\sigma} \in L_2$, и потому существует абсолютно сходящийся интеграл (пояснение ниже, см. сноску на стр. 272)

$$\int \tilde{\varphi}_{a,\delta}\bar{\tilde{\varphi}}_{b,\sigma}dx = \lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N} \tilde{\varphi}_{a,\delta}\bar{\tilde{\varphi}}_{b,\sigma}\,dx =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N}\int e^{-ixu}\varphi_{a,\delta}(u)\,du\int e^{ixv}\varphi_{b,\sigma}(v)\,dv\,dx =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\int \varphi_{a,\delta}(u)\left(\frac{1}{\pi}\int \varphi_{b,\sigma}(v)\frac{\sin N(u-v)}{u-v}\,dv\right)du =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\int \varphi_{a,\delta}(u)\,\bar{\hat{\varphi}}^{N}_{b,\sigma}(u)\,du = \int \varphi_{a,\delta}\varphi_{b,\sigma}\,du.$$

Все три интеграла в третьем члене цепи имеют конечные пределы, и законна перестановка порядка интегрирования, приводящая после интегрирования по x к четвертому члену. Переход от пятого члена цепи к шестому (предпоследнему) следует из того, что $\bar{\hat{\varphi}}^{N}_{b,\sigma} \to \varphi_{b,\sigma}$ в смысле L_2.

Произвольная финитная ступенчатая функция от одной переменной может быть записана в виде

$$f(x) = \sum_1^m c_k\varphi_{a_k,\delta_k}(x),$$

где c_k — постоянные коэффициенты, вообще комплексные, и интервалы $(a_k-\delta_k,\ a_k+\delta_k)$ и $(a_l-\delta_l,\ a_l+\delta_l)$ при $k\neq l$ не пересекаются.

Дальнейшие факты излагаются в двумерном случае. Приводимые формулировки и доказательство распространяются на n-мерный случай очевидным образом.

В двумерном случае простейшая финитная ступенчатая функция имеет вид

$$\varphi_\Delta(x, y)=\begin{cases}1 & ((x, y)\in\Delta),\\ 0 & ((x, y)\,\overline{\in}\,\Delta),\end{cases}$$

где

$$\Delta=\{a-\delta\leqslant x<a+\delta,\ b-\sigma\leqslant y<b+\sigma\}.$$

— прямоугольник. Во всех ее точках непрерывности

$$\varphi_\Delta(x, y)=\varphi_{a,\,\delta}(x)\varphi_{b,\,\sigma}(y). \tag{10}$$

Произвольная финитная ступенчатая функция f от переменных (x, y) может быть записана в виде конечной суммы

$$f(x, y)=\sum_1^m c_k\varphi_{\Delta^k}(x, y)=\sum_1^m c_k\varphi_{a_k,\delta_k}(x)\,\varphi_{b_k,\sigma_k}(y), \tag{11}$$

где c_k — постоянные числа, вообще комплексные, а прямоугольники

$$\Delta^1,\ \ldots,\ \Delta^m \tag{12}$$

попарно не пересекаются.

Из сказанного выше следует, что

$$\widetilde{f}^N(x, y)\to\widetilde{f}(x, y)=\sum_1^m c_k\widetilde{\varphi}_{a_k,\delta_k}(x)\,\widetilde{\varphi}_{b_k,\sigma_k}(y)\quad (N\to\infty), \tag{13}$$

$$\widehat{f}^N=\sum_1^m c_k\widehat{\varphi}^N_{a_k,\delta_k}(x)\,\widehat{\varphi}^N_{b_k,\sigma_k}(y)\to\sum_1^m c_k\varphi_{a_k,\delta_k}(x)\,\varphi_{b_k,\sigma_k}(y)=$$

$$=f(x, y)\quad (N\to\infty),$$

где сходимость поточечная (во втором соотношении, в точках непрерывности функций $\varphi_{a_k,\delta_k}(x)\,\varphi_{b_k,\sigma_k}(y)$), а также в смысле среднего квадратического.

Множество всех ступенчатых финитных функций обозначим через $\mathfrak{M}$.

Если наряду с $f\in\mathfrak{M}$ задана другая функция $\psi\in\mathfrak{M}$, то можно считать, что

$$\psi(x, y)=\sum_1^m c_k'\varphi_{\Delta^k}(x, y), \tag{14}$$

и система прямоугольников Δ^k — та же, что и в (12), потому что объединение двух систем прямоугольников, определяющих f и φ, можно, очевидно, представить как сумму конечного числа прямоугольников, пересекающихся попарно разве что по своим границам.

Важно отметить, что *)

$$(f, \varphi) = \int\int f(x, y)\overline{\varphi(x, y)}\,dx\,dy =$$

$$= \sum_1^m c_k \bar{c}'_k \int\int \varphi_{a_k,\delta_k}(x)\varphi_{b_k,\sigma_k}(y)\overline{\varphi_{a_k,\delta_k}(x)\varphi_{b_k,\sigma_k}(y)}\,dx\,dy =$$

$$= \sum_1^m c_k \bar{c}'_k \int |\varphi_{a_k,\delta_k}(x)|^2\,dx \int |\varphi_{b_k,\sigma_k}(y)|^2\,dy =$$

$$= \sum_1^m c_k \bar{c}'_k \int |\widetilde{\varphi}_{a_k,\delta_k}(x)|^2\,dx \int |\widetilde{\varphi}_{b_k,\sigma_k}(y)|^2\,dy = (\widetilde{f}, \widetilde{\varphi}), \tag{15}$$

потому что, очевидно, функции $\varphi_{\Delta k}(x, y)$ и $\varphi_{\Delta l}(x, y)$ для $k \neq l$ ортогональны на плоскости и в одномерном случае верны равенства (4).

Последнее равенство цепи доказывается как равенство первого и четвертого ее членов, если в них заменить f, φ соответственно на $\widetilde{f}$, $\widetilde{\varphi}$ и учесть ортогональность $\widetilde{\varphi}_{a_k,\delta_k}$ с $\widetilde{\varphi}_{a_i,\delta_i}$, $k \neq i$. Из (15) следует, в частности,

$$(f, f) = (\widetilde{f}, \widetilde{f}) \text{ для всех } f \in \mathfrak{M}.$$

§ 16.10. Теорема Планшереля. Оценка сходимости простого интеграла

Эта теорема носит законченный характер, если ее формулировать на языке лебегова пространства L_2, имеющего то преимущество перед L'_2, что оно полно (см. свойство 20, § 19.3). Мы сформулируем эту теорему и даем ее доказательство, основанное на том факте (см. свойство 18, § 19.3), что *множество ступенчатых финитных функций плотно в* L_2.

Теорема 1 (Планшереля). *Для каждой функции* $f \in L_2 = L_2(R_n)$ *существуют ее преобразования Фурье* $\widetilde{f}$, $\widehat{f} \in L_2$:

$$\widetilde{f}(\mathbf{x}) = \lim_{N\to\infty} \widetilde{f}^N(\mathbf{x}) = \lim \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\Delta_N} f(\mathbf{u})\, e^{-i\mathbf{x}\mathbf{u}}\,d\mathbf{u}, \tag{1}$$

$$\widehat{f}(\mathbf{x}) = \lim_{N\to\infty} \widehat{f}^N(\mathbf{x}) = \lim \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\Delta_N} f(\mathbf{u})\, e^{i\mathbf{x}\mathbf{u}}\,d\mathbf{u}, \tag{1'}$$

*) В этих рассуждениях рассматривается скалярное произведение f и φ (со знаком комплексного сопряжения над φ), имея в виду применение формулы (15) в следующем параграфе (см. сноску к (4) § 16.6).