объединение двух систем прямоугольников, определяющих f и φ, можно, очевидно, представить как сумму конечного числа прямоугольников, пересекающихся попарно разве что по своим границам.

Важно отметить, что *)

$$(f, \varphi) = \int\int f(x, y)\overline{\varphi(x, y)}\,dx\,dy =$$

$$= \sum_1^m c_k\overline{c}'_k \int\int \varphi_{a_k,\delta_k}(x)\varphi_{b_k,\sigma_k}(y)\overline{\varphi_{a_k,\delta_k}(x)\varphi_{b_k,\sigma_k}(y)}\,dx\,dy =$$

$$= \sum_1^m c_k\overline{c}'_k \int |\varphi_{a_k,\delta_k}(x)|^2\,dx \int |\varphi_{b_k,\sigma_k}(y)|^2\,dy =$$

$$= \sum_1^m c_k\overline{c}'_k \int |\widetilde{\varphi}_{a_k,\delta_k}(x)|^2\,dx \int |\widetilde{\varphi}_{b_k,\sigma_k}(y)|^2\,dy = (\widetilde{f}, \widetilde{\varphi}), \qquad (15)$$

потому что, очевидно, функции $\varphi_{\Delta k}(x, y)$ и $\varphi_{\Delta l}(x, y)$ для $k \neq l$ ортогональны на плоскости и в одномерном случае верны равенства (4).

Последнее равенство цепи доказывается как равенство первого и четвертого ее членов, если в них заменить f, φ соответственно на $\widetilde{f}$, $\widetilde{\varphi}$ и учесть ортогональность $\widetilde{\varphi}_{a_k,\delta_k}$ с $\widetilde{\varphi}_{a_i,\delta_i}$, $k \neq i$. Из (15) следует, в частности,

$$(f, f) = (\widetilde{f}, \widetilde{f}) \text{ для всех } f \in \mathfrak{M}.$$

§ 16.10. Теорема Планшереля. Оценка сходимости простого интеграла

Эта теорема носит законченный характер, если ее формулировать на языке лебегова пространства L_2, имеющего то преимущество перед L'_2, что оно полно (см. свойство 20, § 19.3). Мы сформулируем эту теорему и даем ее доказательство, основанное на том факте (см. свойство 18, § 19.3), что *множество ступенчатых финитных функций плотно в* L_2.

Теорема 1 (Планшереля). *Для каждой функции* $f \in L_2 = L_2(R_n)$ *существуют ее преобразования Фурье* $\widetilde{f}$, $\widehat{f} \in L_2$:

$$\widetilde{f}(\mathbf{x}) = \lim_{N\to\infty} \widetilde{f}^N(\mathbf{x}) = \lim \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\Delta_N} f(\mathbf{u})\,e^{-i\mathbf{x}\mathbf{u}}\,d\mathbf{u}, \qquad (1)$$

$$\widehat{f}(\mathbf{x}) = \lim_{N\to\infty} \widehat{f}^N(\mathbf{x}) = \lim \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\Delta_N} f(\mathbf{u})\,e^{i\mathbf{x}\mathbf{u}}\,d\mathbf{u}, \qquad (1')$$

*) В этих рассуждениях рассматривается скалярное произведение f и φ (со знаком комплексного сопряжения над φ), имея в виду применение формулы (15) в следующем параграфе (см. сноску к (4) § 16.6).

где $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$, $\mathbf{x} = (x_1 \ldots, x_n)$, $\mathbf{ux} = \sum_{i=1}^{n} u_j x_j$,

$$\Delta_N = \{|x_j| \leqslant N;\ j = 1, \ldots, n\},$$

и сходимость понимается в смысле L_2.

Преобразования $\tilde{f}$, $\hat{f}$

1) *линейны;*

2) *отображают L_2 на L_2 взаимно однозначно;*

3) *взаимнообратимы $(f = \hat{\tilde{f}} = \tilde{\hat{f}},\ f \in L_2)$;*

4) *сохраняют скалярное произведение: $(f, \psi) = (\tilde{f}, \tilde{\psi}) = (\hat{f}, \hat{\psi})$, $(f, \psi \in L_2)$, таким образом, изометричны $(\|f\| = \|\tilde{f}\| = \|\hat{f}\|)$,*

$$(f, \varphi) = \int f(\mathbf{u}) \overline{\varphi(\mathbf{u})}\, d\mathbf{u},\quad \int\limits_{R_n} = \int.$$

Доказательство. В предыдущем параграфе было доказано, что ступенчатые финитные функции $f (f \in \mathfrak{M})$ **не только** принадлежат L_2, но и отображаются при помощи операций $\tilde{f}, \hat{f}$ в L_2, и для них выполняется свойство 4).

Пусть теперь функция $f \in L_2$ и пока финитна. Тогда при достаточно большом N ее носитель принадлежит Δ_N и

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) = \tilde{f}^N(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\Delta_N} f(\mathbf{u})\, e^{-i\mathbf{xu}}\, d\mathbf{u}. \tag{2}$$

В этом случае $f \in L$ и потому (см. § 16.2) $\tilde{f}$ — непрерывная функция на $R = R_n$. Докажем, что она принадлежит к L_2 и что

$$\|\tilde{f}\| = \|f\| \quad (\|\ \ \| = \|\ \ \|_{L_2}). \tag{3}$$

В самом деле, существует последовательность финитных ступенчатых функций $f_\nu (f_\nu \in \mathfrak{M})$ с носителями, принадлежащими Δ_N, таких, что

$$\|f - f_\nu\| \to 0 \quad (\nu \to \infty). \tag{4}$$

Отсюда

$$|\tilde{f}(x) - \tilde{f}_\nu(x)| = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \left| \int\limits_{\Delta_N} [f(t) - f_\nu(t)]\, e^{-ixt} dt \right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|f - f_\nu\| (2N)^{n/2} \to 0 \quad (\nu \to \infty).$$

Таким образом, $\tilde{f}_\nu(x) \to \tilde{f}(x)$ равномерно на R_n. Зададим $\varepsilon > 0$. В силу (4) и свойства 4), уже проверенного для функций $f_\nu \in \mathfrak{M}$, для достаточно большого s

$$\varepsilon > \|f_p - f_q\| = \|\tilde{f}_p - \tilde{f}_q\| \geqslant \|\tilde{f}_p - \tilde{f}_q\|_{L_2(\Delta_\lambda)},\ p, q > s, \tag{5}$$

где $\lambda > 0$ — произвольное число. Но в силу равномерной сходимости $\tilde{f}_q \to \tilde{f}$ и конечности прямоугольника Δ_λ можно перейти при $q \to \infty$ к пределу под знаком нормы (интеграла) и получить неравенство

$$\varepsilon \geqslant \|\tilde{f}_p - \tilde{f}\|_{L_2(\Delta_\lambda)} \quad (p > s).$$

Если теперь при фиксированном p увеличить до бесконечности λ, то получим в пределе неравенство

$$\varepsilon \geqslant \|\tilde{f}_p - \tilde{f}\| \geqslant |\|\tilde{f}_p\| - \|\tilde{f}\|| \quad (p > s),$$

которое мы дополнили еще вторым очевидным неравенством. Поэтому

$$\|\tilde{f}\| = \lim_{p\to\infty} \|\tilde{f}_p\| = \lim_{p\to\infty} \|f_p\| = \|f\|,$$

и мы доказали, что $\tilde{f} \in L_2$, а также справедливость равенства (3).

Справедливость соотношения (1) для рассматриваемой функции $f \in L_2$ (с компактным носителем) тривиальным образом следует из равенства (2) для достаточно больших N.

Пусть теперь $f \in L_2$ — произвольная функция. Тогда для любых положительных N и N' $(N < N')$ имеет место (пояснение ниже)

$$\|f^{N'} - f^N\| = \left\| \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\Delta_{N'} - \Delta_N} f(u)\, e^{-i\mathbf{x}\mathbf{u}}\, d\mathbf{u} \right\| =$$

$$= \|f\|_{L_2(\Delta_{N'} - \Delta_N)} \to 0, \quad N, N' \to \infty, \qquad (6)$$

и вследствие полноты L_2 существует в L_2 функция, которую мы обозначим через $\tilde{f}$, такая, что

$$\|\tilde{f} - \tilde{f}^N\| \to 0 \quad (N \to \infty), \qquad (7)$$

т. е. имеет место (4).

Функцию $\tilde{f}^{N'} - \tilde{f}^N$ можно рассматривать как преобразование Фурье функции, имеющей компактный носитель, равной $f(\mathbf{x})$ на $\Delta_{N'} - \Delta_N$ и нулю в остальных точках. Для такой функции свойство сохранения нормы ее преобразования Фурье уже доказано. Это объясняет (6).

Из (7) следует:

$$\|\tilde{f}\| = \lim_{N\to\infty} \|\tilde{f}^N\| = \lim_{N\to\infty} \|f\|_{L_2(\Delta_N)} = \|f\|.$$

Линейность операции $\sim$ очевидна. Имеет также место ее непрерывность

$$\|\tilde{f}_k - \tilde{f}\| = \|\widetilde{f_k - f}\| = \|f_k - f\| \to 0 \quad (k \to \infty).$$

В силу того, что $\tilde{f}(-x) = \hat{f}(x)$, полученные результаты верны и для операции $\wedge$.

Теперь нетрудно доказать равенства

$$f = \hat{\tilde{f}} = \tilde{\hat{f}}, \quad f \in L_2. \tag{8}$$

Ведь для функций $f \in \mathfrak{M}$ они верны, и так как для $f \in L_2$ найдется последовательность функций $f_\nu \in \mathfrak{M}$ такая, что $\|f_\nu - f\| \to 0$, то в силу непрерывности операций $\sim$, $\wedge$ равенство (8) можно получить из равенств

$$f_\nu = \hat{\tilde{f}}_\nu = \tilde{\hat{f}}_\nu$$

переходом к пределу при $\nu \to \infty$.

Если $\psi \in L_2$, то $\hat{\psi} \in L_2$ и $\psi = \tilde{\hat{\psi}}$. Это показывает, что операция $\sim$ отображает L_2 на L_2 и притом взаимно однозначно, так как из $\tilde{\psi}_1 = \tilde{\psi}_2$ следует $\psi_1 - \psi_2 = \widehat{\tilde{\psi}_1 - \tilde{\psi}_2} = \hat{0} = 0$.

В этих рассуждениях символ $\sim$ можно поменять местами с символом $\wedge$. Мы доказали свойство 2).

Наконец, если

$$\|f - f_\nu\|, \ \|\varphi - \varphi_\nu\| \to 0 \quad (\nu \to \infty, \ f_\nu, \ \varphi_\nu \in \mathfrak{M}),$$

то из равенств

$$(f_\nu, \varphi_\nu) = (\tilde{f}_\nu, \tilde{\varphi}_\nu)$$

следует путем перехода к пределу

$$(f, \varphi) = (\tilde{f}, \tilde{\varphi}).$$

Ведь

$$|(f, \varphi) - (f_\nu, \varphi_\nu)| = |((f - f_\nu), \varphi) - (f_\nu, \varphi_\nu - \varphi)| \leqslant$$
$$\leqslant \|f - f_\nu\| \|\varphi\| + \|f_\nu\| \|\varphi_\nu - \varphi\| \to 0 \ (\nu \to \infty).$$

Теорема доказана.

Теорема 2 (аналог теоремы 6 § 15.11). *Пусть $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda, \ldots, \lambda)$ — вектор, где λ — натуральное число, и пусть для любого неотрицательного целого вектора $\mathbf{k} \leqslant \boldsymbol{\lambda}$ частная производная $f^{(\mathbf{k})}$ (в частности, f) непрерывна и выполняются неравенства*

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int |f^{(\mathbf{l})}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \leqslant M^2$$

для любого $\mathbf{l} = (l_1, \ldots, l_n)$ с координатами l_j, равными 0 или λ. Тогда простой интеграл $S_N(\mathbf{x})$ функции $f(\mathbf{x})$ отклоняется от нее с оценкой

$$|f(\mathbf{x}) - S_N(\mathbf{x})| \leqslant \frac{CM}{N^{\lambda - \frac{1}{2}}}, \tag{9}$$

где C зависит от λ, но не от M и N.

Доказательство. Оценим функцию

$$\rho_N(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\Delta'_N} \tilde{f}(\mathbf{u})\, e^{i\mathbf{x}\mathbf{u}}\, d\mathbf{u},$$

где

$$\Delta'_N = R_n - \Delta_N.$$

Можно еще сказать, что Δ'_N есть множество точек $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ таких, что $\max\limits_j |u_j| \geqslant N$.

Так как $f \in L_2$, то по теореме Планшереля $\tilde{f} \in L_2$ и $\rho_N(\mathbf{x})$ можно рассматривать как предел (в среднем)

$$\rho_N(\mathbf{x}) = \lim_{N_1 \to \infty} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\Delta_{N_1} - \Delta_N} \tilde{f}(\mathbf{u})\, e^{i\mathbf{x}\mathbf{u}} d$$

Для целого m, удовлетворяющего неравенствам $0 \leqslant m < n$, определим множество Ω_m точек $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ таких, что

$$\left.\begin{array}{ll} |u_j| \leqslant 1 & (j = 1, \ldots, m, \text{ если } m > 0), \\ |u_{m+1}| \geqslant N, \ |u_j| \geqslant 1 & (j = m+2, \ldots, n, \text{ если } n > m+1). \end{array}\right\} \qquad (10)$$

Буквой Ω_m будем также обозначать всякое множество, сводящееся к определенному выше множеству после соответствующей перенумерации координат.

Очевидно,

$$\Delta'_N = \sum_{m=0}^{n-1} \sum \Omega_m,$$

где вторая сумма распространяется на всевозможные различные Ω_m. Если перенумеровать все ее слагаемые ($\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_p$) и затем положить

$$E_1 = \Lambda_1, \ E_2 = \Lambda_2 - E_1, \ \ldots, \ E_p = \Lambda_p - \sum_1^{p-1} E_k,$$

то получим

$$\Delta'_N = \sum_1^p E_k, \quad E_k E_s = 0 \quad (k \neq s),$$

и при этом каждое E_k принадлежит к некоторому Ω_m.

Имеем пока формально (пояснения ниже)

$$\rho_N(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \sum_{k=1}^{p} \int\limits_{E_k} \tilde{f}(\mathbf{u})\, e^{i\mathbf{x}\mathbf{u}}\, d\mathbf{u}. \qquad (11)$$

Оценим один из интегралов $\int\limits_{E_k}$, считая для определенности, что $E_k \subset \Omega_m$, где Ω_m определено именно неравенствами (10).

В силу равенства

$$\frac{\partial^{(n-m)\lambda} f}{\partial x_{m+1}^{\lambda} \dots \partial x_n^{\lambda}} = i^{(n-m)\lambda} \widehat{u_{m+1}^{\lambda} \dots u_n^{\lambda} \tilde{f}} \tag{12}$$

или

$$\tilde{f}(\mathbf{u}) = \frac{1}{i^{(n-m)\lambda} u_{m+1}^{\lambda} \dots u_n^{\lambda}} \widetilde{\frac{\partial^{(n-m)\lambda} f}{\partial x_{m+1}^{\lambda} \dots \partial x_n^{\lambda}}}(\mathbf{u})$$

получим

$$\int\limits_{E_k} |\tilde{f}(\mathbf{u}) e^{i\mathbf{x}\mathbf{u}}|\, d\mathbf{u} \leqslant \int\limits_{E_k} \left| \frac{1}{u_{m+1}^{\lambda} \dots u_n^{\lambda}} \widetilde{\frac{\partial^{(n-m)\lambda} f(\mathbf{u})}{\partial x_{m+1}^{\lambda} \dots \partial x_n^{\lambda}}} \right| d\mathbf{u} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{E_k} \frac{du}{u_{m+1}^{2\lambda} \dots u_n^{2\lambda}} \right)^{1/2} \cdot \left(\int\limits_{R_n} \left| \frac{\partial^{(n-m)\lambda} f}{\partial x_{m+1}^{\lambda} \dots \partial x_n^{\lambda}} \right|^2 d\mathbf{u} \right)^{1/2} \leqslant \frac{C'M}{N^{\lambda - \frac{1}{2}}}. \tag{13}$$

Отсюда следует, что

$$|\rho_N(\mathbf{x})| \leqslant \frac{CM}{N^{\lambda - \frac{1}{2}}}, \tag{14}$$

где C, так же, как и C', не зависит от M и N.

Оценки (13) показывают, что интегралы (11) сходятся, и притом абсолютно, для любого $\mathbf{x}$. Мало того, при $N \to \infty$ они, а вместе с ними и $\rho_N(\mathbf{x})$, равномерно сходятся к нулю. Таким образом, функция

$$S_N(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\Delta_N} \tilde{f}(\mathbf{u}) e^{i\mathbf{x}\mathbf{u}}\, d\mathbf{u}$$

равномерно сходится при $N \to \infty$. Но в то же время в силу того, что $f \in L_2$, по теореме Планшереля $S_N(\mathbf{x})$ при $N \to \infty$ стремится к $f(\mathbf{x})$ в смысле среднего квадратического, поэтому (см. лемму 1 § 15.11) $S_N(\mathbf{x})$ стремится равномерно именно к $f(\mathbf{x})$ и, следовательно,

$$\rho_N(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - S_N(\mathbf{x}). \tag{15}$$

Из (14) и (15) следует (9).

§ 16.11. Обобщенные периодические функции

Пусть S^* — множество бесконечно дифференцируемых периода 2π функций φ от одной переменной x. Каждую функцию $\varphi \in S^*$ можно записать в виде сходящегося к ней равномерно ее