Оценим один из интегралов $\int\limits_{E_k}$, считая для определенности, что $E_k \subset \Omega_m$, где Ω_m определено именно неравенствами (10).

В силу равенства

$$\widetilde{\frac{\partial^{(n-m)\lambda} f}{\partial x_{m+1}^{\lambda} \ldots \partial x_n^{\lambda}}} = i^{(n-m)\lambda} u_{m+1}^{\lambda} \ldots u_n^{\lambda} \tilde{f} \tag{12}$$

или

$$\tilde{f}(\mathbf{u}) = \frac{1}{i^{(n-m)\lambda} u_{m+1}^{\lambda} \ldots u_n^{\lambda}} \widetilde{\frac{\partial^{(n-m)\lambda} f}{\partial x_{m+1}^{\lambda} \ldots \partial x_n^{\lambda}}} (\mathbf{u})$$

получим

$$\int\limits_{E_k} |\tilde{f}(\mathbf{u}) e^{i\mathbf{x}\mathbf{u}}| \, d\mathbf{u} \leqslant \int\limits_{E_k} \left| \frac{1}{u_{m+1}^{\lambda} \ldots u_n^{\lambda}} \widetilde{\frac{\partial^{(n-m)\lambda} f(\mathbf{u})}{\partial x_{m+1}^{\lambda} \ldots \partial x_n^{\lambda}}} \right| d\mathbf{u} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{E_k} \frac{du}{u_{m+1}^{2\lambda} \ldots u_n^{2\lambda}} \right)^{1/2} \cdot \left(\int\limits_{R_n} \left| \frac{\partial^{(n-m)\lambda} f}{\partial x_{m+1}^{\lambda} \ldots \partial x_n^{\lambda}} \right|^2 d\mathbf{u} \right)^{1/2} \leqslant \frac{C'M}{N^{\lambda - \frac{1}{2}}}. \tag{13}$$

Отсюда следует, что

$$|\rho_N(\mathbf{x})| \leqslant \frac{CM}{N^{\lambda - \frac{1}{2}}}, \tag{14}$$

где C, так же, как и C', не зависит от M и N.

Оценки (13) показывают, что интегралы (11) сходятся, и притом абсолютно, для любого $\mathbf{x}$. Мало того, при $N \to \infty$ они, а вместе с ними и $\rho_N(\mathbf{x})$, равномерно сходятся к нулю. Таким образом, функция

$$S_N(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\Delta_N} \tilde{f}(\mathbf{u}) e^{i\mathbf{x}\mathbf{u}} \, d\mathbf{u}$$

равномерно сходится при $N \to \infty$. Но в то же время в силу того, что $f \in L_2$, по теореме Планшереля $S_N(\mathbf{x})$ при $N \to \infty$ стремится к $f(\mathbf{x})$ в смысле среднего квадратического, поэтому (см. лемму 1 § 15.11) $S_N(\mathbf{x})$ стремится равномерно именно к $f(\mathbf{x})$ и, следовательно,

$$\rho_N(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - S_N(\mathbf{x}). \tag{15}$$

Из (14) и (15) следует (9).

§ 16.11. Обобщенные периодические функции

Пусть S^* — множество бесконечно дифференцируемых периода 2π функций φ от одной переменной x. Каждую функцию $\varphi \in S^*$ можно записать в виде сходящегося к ней равномерно ее ряда Фурье (см. теорему 2 § 15.5)

$$\varphi(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \qquad c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\, e^{-ikt}\, dt \tag{1}$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Его можно почленно дифференцировать сколько угодно раз (см. § 15.7)

$$\varphi^{(s)}(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} (ik)^s c_k e^{ikx} \qquad (s = 1, 2, \ldots), \tag{2}$$

и при этом при любом натуральном s ряд справа в (2) равномерно сходится к $\varphi^{(s)}(x)$.

Будем писать

$$\varphi_n \to \varphi \quad (S^*),$$

если φ_n, $\varphi \in S^*$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и $\varphi_n^{(s)}(x) \to \varphi^{(s)}(x)$ $(n \to \infty)$ равномерно при любом целом $s \geqslant 0$.

В частности, очевидно, что если функция $\varphi \in S^*$ и $S_N(x) = \sum_{-N}^{N} c_k e^{ikx}$ — ее N-я сумма Фурье, то $S_N \to \varphi \quad (S^*)$.

Обозначим через S'^* совокупность линейных функционалов f над S^* (обобщенных функций). Обычная функция $f \in L'^*(L^*)$ при помощи равенства (без черты над φ!)

$$(f, \varphi) = \int_0^{2\pi} f(t)\,\varphi(t)\, dt \qquad (\varphi \in S^*) \tag{3}$$

определяет обобщенную функцию из S'^*, которую обозначают тоже через f. Нет необходимости повторять рассуждение, приведенное в § 16.7 в случае S, о том, что два функционала вида (3), определяемые функциями f_1, $f_2 \in L'^*$, тождественно равны на S^* тогда и только тогда, если $f_1(x) = f_2(x)$ в точках непрерывности f_1 и f_2 (в случае L^* почти всюду).

Так как функции $e^{ikx} (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ принадлежат к S^*, то любому функционалу $f \in S'^*$ можно привести в соответствие числа

$$c_k = \frac{1}{2\pi}(f, e^{-ikt}) \qquad (k = 0, \pm 1 \pm 2, \ldots),$$

называемые *коэффициентами Фурье* f.

Докажем, что имеет место равенство

$$\frac{1}{2\pi}(f, \varphi) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi}\left(\sum_{-N}^{N} c_k e^{ikx}, \varphi\right) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k c'_{-k}, \tag{4}$$

$$2\pi c'_{-k} = (e^{ikx}, \varphi),$$

выражающее, что ряд

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \tag{5}$$

называемый рядом Фурье обобщенной функции f, сходится к ней в смысле S'^*.

В самом деле,

$$\left(\sum_{-N}^{N} c_k e^{ikx}, \varphi\right) = \sum_{-N}^{N} c_k (e^{ikx}, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-N}^{N} (f, e^{-ikx}) (e^{ikx}, \varphi)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{-N}^{N} (f, (e^{ikx}, \varphi) e^{-ikx}) = \left(f, \frac{1}{2\pi} \sum_{-N}^{N} (e^{ikx}, \varphi) e^{-ikx}\right) =$$

$$= (f, S_N(x)) \to (f, \varphi) \qquad (N \to \infty),$$

потому что $S_N(x) \to \varphi(x)(S^*)$.

Заметим, что в силу ортогональных свойств функций e^{ikx}

$$(f, e^{ilx}) = \lim_{N\to\infty} \sum_{-N}^{N} c_k (e^{ikx}, e^{ilx}) = 2\pi c_{-l}.$$

Отсюда следует, что представление функции $f \in S'^*$ в виде сходящегося (в смысле S'^*) ряда (5) с постоянными коэффициентами единственно.

Покажем, что для любой функции $f \in S'^*$ найдется зависящее от f (но не от k) натуральное λ и константа A такие, что

$$|c_k| \leqslant A|k|^\lambda \; (k = \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{6}$$

В самом деле, если бы это было не так, то каждому $\lambda = 1, 2, \ldots$ нашлось бы k_λ такое, что

$$|c_{k_\lambda}| \geqslant |k_\lambda|^\lambda \text{ и } |k_1| < |k_2| < \ldots$$

Положим

$$\varphi_\lambda(x) = \frac{e^{-ik_\lambda x}}{|k_\lambda|^\lambda} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots).$$

Очевидно, что $\varphi_\lambda \in S^*$ и при любом неотрицательном целом s

$$\varphi_\lambda^{(s)}(x) = \frac{(-ik_\lambda)^s e^{-ik_\lambda x}}{|k_\lambda|^\lambda} \to 0 \qquad (\lambda \to \infty)$$

равномерно; поэтому

$$\varphi_\lambda \to 0 \;\; (S^*)$$

и

$$(f, \varphi_\lambda) \to 0 \quad (\lambda \to \infty).$$

Но, с другой стороны, в силу (4) и ортогональных свойств функций e^{ikx}

$$\frac{1}{2\pi}\left|(f, \varphi_\lambda)\right| = \left|c_{k_\lambda}c'_{-k_\lambda}\right| \geqslant |k_\lambda|^\lambda \frac{1}{|k_\lambda|^\lambda} = 1 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots),$$

и мы получили противоречие.

Наоборот, если числа c_k $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ подчиняются при некоторых A, $\lambda > 0$ неравенству (6) для всех k, то функционал

$$\frac{1}{2\pi}(f, \varphi) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k c'_{-k}, \quad 2\pi c'_{-k} = (\varphi, e^{ikx}) \tag{7}$$

есть обобщенная функция $f \in S'^*$. В самом деле, при $k \neq 0$

$$c'_k = \frac{1}{2\pi (ik)^s} \int_0^{2\pi} e^{-ikt}\varphi^{(s)}(t)\, dt,$$

откуда

$$|c'_k| \leqslant \frac{\|\varphi^{(s)}\|_C}{k^s}, \quad \|\varphi^{(s)}\|_C = \max_t |\varphi^{(s)}(t)|$$

и при $s = \lambda + 2$

$$\left|\frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}{}' c_k c'_k\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}{}' A k^{\lambda - s}\|\varphi^{(s)}\|_C = \frac{A}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}{}' k^{-2}\|\varphi^{(s)}\|_C$$

(штрих обозначает, что Σ не распространяется на $k = 0$). С другой стороны,

$$\frac{1}{2\pi}|c_0 c'_0| \leqslant \frac{|c_0|}{2\pi}\|\varphi\|_C.$$

Таким образом,

$$|(f, \varphi)| \leqslant B(\|\varphi^{(s)}\|_C + \|\varphi\|_C),$$

где B — константа, не зависящая от φ; поэтому если $\varphi_n \to \varphi(S^*)$, то

$$\begin{aligned}(f, \varphi) - (f, \varphi_n)| &= |(f, \varphi - \varphi_n)| \leqslant \\ &\leqslant B\left(\|\varphi^{(s)} - \varphi_n^{(s)}\|_C + \|\varphi - \varphi_n\|_C\right) \to 0 \qquad (n \to \infty)\end{aligned}$$

откуда $f \in S'^*$.

Конечно, функционал (7) можно записать еще в виде (5), но об этом уже говорилось выше.

Из сказанного следует, что S'^* можно определить как совокупность формальных рядов

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

с коэффициентами, удовлетворяющими неравенствам (6), где A, $\lambda > 0$ — постоянные, зависящие от ряда, а значения f на $\varphi \in S^*$ определяются при помощи равенства (4). Функция $\delta(x)$ в S'^* определяется в виде ряда

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots\right).$$

Для каждой функции $\varphi \in S^*$ имеет место

$$(\delta, \varphi) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{1}^{N} \cos kt\right) \varphi(t)\, dt = \lim_{N\to\infty} S_N(\varphi, 0) = \varphi(0),$$

где $S_N(\varphi, 0)$ — значение при $x = 0$ N-й частичной суммы ряда Фурье φ.

Как и в случае S' (см. § 16.7, (7)), назовем производной от $F \in S'^*$ функционал F', равный

$$(F', \varphi) = -(F, \varphi').$$

Покажем, что если

$$F(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx},$$

то

$$F'(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} (ik)\, c_k e^{ikx}. \tag{8}$$

Заметим, что в силу неравенства $|c_k| \leqslant A|k|^{\lambda}$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ верного при некоторых A, $\lambda > 0$, верно также неравенство

$$|ikc_k| \leqslant A|k|^{\lambda+1},$$

из которого следует, как мы знаем, что ряд (8) сходится в смысле S'^* к некоторой функции $\Phi \in S'^*$. Равенство $\Phi = F'$ справедливо в силу следующих выкладок:

$$(\Phi, \varphi) = \lim_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{-N}^{N} (ik)\, c_k e^{ikx} \varphi(x)\, dx =$$

$$= -\lim_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{-N}^{N} c_k e^{ikx} \varphi'(x)\, dx = -(F, \varphi')$$

$$\left(\text{учесть, что } \int_{-\pi}^{\pi} \varphi'(x)\, dx = 0\right).$$

Этот результат представляет собой обобщение теоремы 1 § 15.7 о почленном дифференцировании обычных рядов Фурье.

Если функция $f \in L'^*(L^*)$, то она принадлежит и к S'^* и ее коэффициенты Фурье в обычном смысле и в смысле S'^* совпадают. Ряд Фурье функции $f \in L^*$ не обязательно сходится к ней; существует пример функции $f \in L^*$, ряд Фурье которой расходится всюду на действительной оси (пример Колмогорова, см. § 15.5). С другой стороны, из сказанного выше в этом параграфе следует, что ряд Фурье функции $f \in L'^*(L^*)$ сходится к f в смысле S'^*.

Остановимся еще на представлении свертки $\Phi * f$ двух функций Φ, $f \in L^*$ через их коэффициенты Фурье. Пусть

$$\Phi(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_k e^{ikx}, \qquad f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}.$$

Тогда (см. § 18.3)

$$\psi(x) = \Phi * f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(x - t) f(t)\, dt \qquad (\psi \in L^*).$$

При этом коэффициент Фурье функции ψ, если воспользоваться теоремой Фубини, может быть преобразован следующим образом:

$$\mu_\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) e^{-i\nu x}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(x - t) e^{-i\nu(x-t)} f(t) e^{-i\nu t}\, dt \right\} dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-i\nu t}\, dt \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(x - t) e^{-i\nu(x-t)}\, dx \right\} = c_\nu \lambda_\nu.$$

Следовательно,

$$\Phi * f = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k \lambda_k e^{ikx}. \tag{9}$$

Естественно определить свертку двух произвольных функций Φ, $f \in S'^*$ при помощи равенства (9). Ведь вместе с коэффициентами c_k и λ_k удовлетворяют неравенствам типа (6) также и их произведения $c_k \lambda_k$.

Замечание. Если функция $f(x)$ — обычная функция периода 2π, принадлежащая $L'^*(L^*)$, то она определяет на S^* линейный функционал по формуле (3) и, следовательно, на основании сказанного выше функции f соответствует ее ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt,$$

сходящийся к ней в смысле S^*, т. е. обладающий свойством

$$\int_0^{2\pi} f(t)\varphi(t)\, dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \sum_{-n}^{n} c_k e^{ikt} \varphi(t)\, dt =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k c'_{-k}, \quad c'_{-k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) e^{ikt}\, dt$$

для всех $\varphi \in S^*$.