Глава 18

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

§ 18.1. Обобщенное неравенство Минковского

Если E — линейное нормированное пространство и $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots$ — его элементы, то имеет место неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^{N} \mathbf{x}^k \right\| \leqslant \sum_{k=1}^{N} \| \mathbf{x}^k \|, \tag{1}$$

получаемое по индукции при любом натуральном N из основного неравенства $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$, $(\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E)$. Далее, если $\mathbf{x}$ есть сумма ряда

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^1 + \mathbf{x}^2 + \ldots = \sum_{1}^{\infty} \mathbf{x}^k,$$

т. е. если $\left\| \mathbf{x} - \sum_{1}^{N} \mathbf{x}^k \right\| \to 0 \quad (N \to \infty)$, то (см. § 6.3)

$$\| \mathbf{x} \| = \lim_{N \to \infty} \left\| \sum_{1}^{N} \mathbf{x}^k \right\| \leqslant \lim_{N \to \infty} \sum_{1}^{N} \| \mathbf{x}^k \| = \sum_{1}^{\infty} \| \mathbf{x}^k \|,$$

$$\| \mathbf{x} \| \leqslant \| \mathbf{x}' \| + \| \mathbf{x}^2 \| + \ldots, \tag{2}$$

где ряд справа может и расходиться.

Применяя (1), (2) к элементам пространств l_p и L_p' (или L_p), получим неравенства (Минковского):

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{l=1}^{m} a_{kl} \right|^p \right)^{1/p} \leqslant \sum_{l=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{\infty} | a_{kl} |^p \right)^{1/p}, \tag{3}$$

$$\left(\int_{\Omega} \left| \sum_{l=1}^{m} f_l (\mathbf{x}) \right|^p d\mathbf{x} \right)^{1/p} \leqslant \sum_{l=1}^{m} \left(\int_{\Omega} | f_l (\mathbf{x}) |^p dx \right)^{1/p} \tag{4}$$

$$(1 \leqslant p \leqslant \infty),$$

где можно считать $m = \infty$, и тогда под суммами $\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} = a_k$ надо понимать такие числа a_k, что $\sum_{1}^{\infty} \left| a_k - \sum_{l=1}^{m} a_{kl} \right|^p \to 0 \quad (m \to \infty)$, так же как под суммой $\sum_{l=1}^{\infty} f_l(\mathbf{x})$ надо понимать функцию $F(\mathbf{x}) \in L_p' (L_p)$, к которой стремится при $m \to \infty$ конечная сумма $\sum\limits_{l=1}^{m} f_l(\mathbf{x})$ в метрике L_p: $\int\limits_{\Omega} \left| F(\mathbf{x}) - \sum\limits_{l=1}^{m} f_l(\mathbf{x}) \right|^p dx \to 0 \quad (m \to \infty)$.

В неравенстве (4) суммирование $f_l(\mathbf{x})$ происходит по дискретному индексу $l = 1, 2, 3, \ldots$ Аналогом его является обобщенное неравенство Минковского

$$\left(\int\limits_G \left(\int\limits_\Omega | F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) | \, d\mathbf{y} \right)^p d\mathbf{x} \right)^{1/p} \leqslant \int\limits_\Omega \left(\int\limits_G | F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) |^p d\mathbf{x} \right)^{1/p} d\mathbf{y} \tag{5}$$

$$(\Omega \subset R_n, \ G \subset R_m)$$

или, что все равно (если считать, что $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ вне $\Omega \times G$), неравенство

$$\left(\int\limits_{R_m} \left(\int\limits_{R_n} | F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) | \, d\mathbf{y} \right)^p d\mathbf{x} \right)^{1/p} \leqslant \int\limits_{R_n} \left(\int\limits_{R_m} | F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) |^p d\mathbf{x} \right)^{1/p} d\mathbf{y}. \tag{6}$$

В обобщенном неравенстве Минковского роль индекса l (в (4)) играет непрерывный параметр $\mathbf{y}$, по которому и происходит суммирование (интегрирование).

В самом общем виде неравенство (6) имеет место, когда интегралы понимаются в лебеговом смысле, и тогда, если имеет смысл правая часть (6), то и левая имеет смысл, и выполняется само неравенство.

Ограничимся для простоты случаем функции $F(x, y)$ от двух (скалярных) переменных x, y. Не нарушая общности, можно считать, что $F(x, y) \geqslant 0$. Будем пока считать, что $F(x, y)$ есть ограниченная, определенная на квадрате $\Delta_N = \{|x|, |y| \leqslant N\}$ функция, интегрируемая по Лебегу или Риману на Δ_N.

Тогда $\left(\text{пояснения ниже, } \int\limits_{-N}^{N} = \int \right)$

$$\begin{aligned}
\int \left(\int F(x, y) \, dy \right)^p dx &= \int \left(\int F(x, y) \, dy \right)^{p-1} \int F(x, y) \, dy \, dx = \\
&= \int \int \left(\int F(x, y) \, dy \right)^{p-1} F(x, y) \, dy \, dx = \\
&= \int \left[\int \left(\int F(x, y) \, dy \right)^{p-1} F(x, y) \, dx \right] dy \leqslant \\
&\leqslant \int \left(\int \left(\int F(x, y) \, dy \right)^p dx \right)^{(p-1)/p} \left(\int F(x, y)^p dx \right)^{1/p} dy = \\
&= \left(\int \left(\int F(x, y) \, dy \right)^p dx \right)^{(p-1)/p} \int \left(\int F(x, y)^p dx \right)^{1/p} dy,
\end{aligned} \tag{7}$$

откуда получим требуемое неравенство

$$\left(\int \left(\int F(x, y) \, dy \right)^p dx \right)^{1/p} \leqslant \int \left(\int F(x, y)^p dx \right)^{1/p} dy. \tag{8}$$

Во втором равенстве (7) интеграл $\left(\int F\,dy\right)^{p-1}$, не зависящий от y, внесен под знак интеграла $\int F(x, y)\,dy$. В третьем произведена замена порядка интегрирования. При интегрировании по Лебегу неотрицательных (измеримых) функций это законно (см. § 19.3, свойство 19, теорема Фубини). Если F интегрируема на Δ_N по Риману, то это тоже законно, потому что тогда интеграл *) $\int F(x, y)\,dy$ есть интегрируемая функция по x на $[-N, N]$, а вместе с ней интегрируема на $[-N, N]$, следовательно, на Δ_N, $(p-1)$-я степень ее модуля, которая умножается на $F(x, y)$ — интегрируемую на Δ_N функцию. Таким образом, в третьем члене (7) под знаком $\int\int$ стоит интегрируемая по Риману функция, и можно менять порядок интегрирования. В четвертом соотношении (неравенстве) в (7) применяется неравенство Гёльдера по x.

В дальнейшем будем рассуждать в терминах интеграла Лебега. Пусть задана произвольная измеримая неотрицательная функция $F(x, y)$, вообще говоря, неограниченная, для которой имеет смысл конечный интеграл справа в (8). Положим

$$F_N(x, y) = \begin{cases} F(x, y), & \text{если } (x, y) \in \Delta_N \text{ и } F \leqslant N, \\ 0 & \text{для остальных } (x, y). \end{cases}$$

Функция F_N — неотрицательная, ограниченная, измеримая, не равная нулю разве что на Δ_N. Для нее при любом N уже доказана справедливость неравенства

$$\left(\int\left(\int F_N(x, y)\,dy\right)^p dx\right)^{1/p} \leqslant \int\left(\int [F_N(x, y)]^p\,dx\right)^{1/p} dy,$$

из которого в силу монотонности стремления (см. § 19.3, свойство 14)

$$F_N(x, y) \to F(x, y) \quad (N \to \infty,\ F_N \leqslant F)$$

следует, как это доказывается в лебеговой теории, справедливость (8).

§ 18.2. Усреднение функции по Соболеву **)

Обозначим через

$$\sigma_\varepsilon = \{|x| \leqslant \varepsilon\}, \quad \sigma_1 = \sigma$$

шар в $R_n = R$ с центром в нулевой точке.

Пусть $\psi(t)$ есть бесконечно дифференцируемая четная неотрицательная функция от одной переменной t $(-\infty < t < \infty)$, равная

---

*) Либо, например, нижний интеграл (см. теорему 1 § 12.12).

**) С. Л. Соболев (род. в 1908 г.) — выдающийся советский математик, академик.