Во втором равенстве (7) интеграл $\left(\int F\,dy\right)^{p-1}$, не зависящий от y, внесен под знак интеграла $\int F(x, y)\,dy$. В третьем произведена замена порядка интегрирования. При интегрировании по Лебегу неотрицательных (измеримых) функций это законно (см. § 19.3, свойство 19, теорема Фубини). Если F интегрируема на Δ_N по Риману, то это тоже законно, потому что тогда интеграл *) $\int F(x, y)\,dy$ есть интегрируемая функция по x на $[-N, N]$, а вместе с ней интегрируема на $[-N, N]$, следовательно, на Δ_N, $(p-1)$-я степень ее модуля, которая умножается на $F(x, y)$ — интегрируемую на Δ_N функцию. Таким образом, в третьем члене (7) под знаком $\int\int$ стоит интегрируемая по Риману функция, и можно менять порядок интегрирования. В четвертом соотношении (неравенстве) в (7) применяется неравенство Гёльдера по x.

В дальнейшем будем рассуждать в терминах интеграла Лебега. Пусть задана произвольная измеримая неотрицательная функция $F(x, y)$, вообще говоря, неограниченная, для которой имеет смысл конечный интеграл справа в (8). Положим

$$F_N(x, y) = \begin{cases} F(x, y), & \text{если } (x, y) \in \Delta_N \text{ и } F \leqslant N, \\ 0 & \text{для остальных } (x, y). \end{cases}$$

Функция F_N — неотрицательная, ограниченная, измеримая, не равная нулю разве что на Δ_N. Для нее при любом N уже доказана справедливость неравенства

$$\left(\int \left(\int F_N(x, y)\,dy\right)^p dx\right)^{1/p} \leqslant \int \left(\int [F_N(x, y)]^p\,dx\right)^{1/p} dy,$$

из которого в силу монотонности стремления (см. § 19.3, свойство 14)

$$F_N(x, y) \to F(x, y) \quad (N \to \infty,\ F_N \leqslant F)$$

следует, как это доказывается в лебеговой теории, справедливость (8).

§ 18.2. Усреднение функции по Соболеву **)

Обозначим через

$$\sigma_\varepsilon = \{|x| \leqslant \varepsilon\}, \quad \sigma_1 = \sigma$$

шар в $R_n = R$ с центром в нулевой точке.

Пусть $\psi(t)$ есть бесконечно дифференцируемая четная неотрицательная функция от одной переменной t $(-\infty < t < \infty)$, равная

---

*) Либо, например, нижний интеграл (см. теорему 1 § 12.12).

**) С. Л. Соболев (род. в 1908 г.) — выдающийся советский математик, академик.

нулю для $|t| \geqslant 1$, такая, что n-кратный интеграл

$$\int \psi(|\mathbf{x}|)\,d\mathbf{x} = \int\limits_{|x|<1} \psi(|\mathbf{x}|)\,d\mathbf{x} = 1, \tag{1}$$

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n), \ |\mathbf{x}|^2 = \sum_1^n x_j^2, \quad \int = \int\limits_R$$

В качестве ψ можно взять функцию

$$\psi(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda_n} e^{1/(t^2-1)}, & 0 \leqslant |t| < 1, \\ 0, & |t| \geqslant 1 \end{cases}$$

(см. § 16.6, упражнение 2), где константа λ_n подобрана так, чтобы выполнялось условие (1).

Функция (бесконечно дифференцируемая на R)

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\varphi\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right), \quad \varphi(\mathbf{x}) = \psi(|\mathbf{x}|), \quad \varepsilon > 0, \tag{2}$$

имеет носитель на σ_ε и удовлетворяет условию

$$\int \varphi_\varepsilon(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \frac{1}{\varepsilon^n}\int \varphi\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right)d\mathbf{x} = \int \varphi(\mathbf{u})\,d\mathbf{u} = \int \psi(|\mathbf{u}|)\,d\mathbf{u} = 1. \tag{3}$$

Пусть $\Omega \subset R$ — открытое множество и $f \in L_p(\Omega)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$*). Положим $f = 0$ на $R - \Omega$. Функция

$$f_\varepsilon(\mathbf{x}) = f_{\Omega,\varepsilon} = \int \varphi_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{u}) f(\mathbf{u})\,d\mathbf{u} = \int \varphi_\varepsilon(\mathbf{u}) f(\mathbf{x} - \mathbf{u})\,d\mathbf{u} \tag{4}$$

называется *ε-усреднением f по Соболеву*. В силу финитности φ вычисление интегралов (3) и (4) сводится к интегрированию по n-мерным шарам. Например, первый интеграл в (4) достаточно распространить на шар $|\mathbf{x} - \mathbf{u}| \leqslant \varepsilon$, а второй — на шар $|\mathbf{u}| \leqslant \varepsilon$.

Остановимся на свойствах f_ε. Условимся в обозначении

$$\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L_p(R)}, \qquad 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

1) *Если* $f \in L_p(R)$, $1 \leqslant p < \infty$, *то*

$$\|f_\varepsilon - f\|_p \to 0, \quad \varepsilon \to 0. \tag{5}$$

Доказательство.

$$f_\varepsilon(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\varepsilon^n}\int \varphi\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{u}}{\varepsilon}\right)[f(\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})]\,d\mathbf{u} =$$
$$= \int \varphi(\mathbf{v})\,[f(\mathbf{x} - \varepsilon\mathbf{v}) - f(\mathbf{x})]\,d\mathbf{v},$$

*) $L_\infty(\Omega)$ есть множество измеримых на Ω функций с нормой $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in \Omega} |f(x)|$ или $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in \Omega} \operatorname{vrai} |f(x)|$ (см. сноску на стр. 328 § 18.3).

откуда, применив обобщенное неравенство Минковского и учитывая, что $\varphi \geqslant 0$ и имеет место (3), получим

$$\|f_\varepsilon - f\|_p \leqslant \int \varphi(v)\, \|f(\mathbf{x} - \varepsilon v) - f(\mathbf{x})\|_p\, d\mathbf{v} \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{|v|<\varepsilon} \|f(\mathbf{x} - \mathbf{v}) - f(\mathbf{x})\|_p \to 0, \quad \varepsilon \to 0. \tag{6}$$

В случае $p = \infty$ свойство 1) не выполняется. Однако, если считать, что $\Omega = R$ и $f(\mathbf{x})$ равномерно непрерывна на R, то (6) запишется в виде

$$\|f_\varepsilon - f\|_\infty \leqslant \sup_{|v|<\varepsilon} |f(\mathbf{x} - \mathbf{v}) - f(\mathbf{x})| \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

2) *Если* $f \in L_p(R)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *то*

$$\|f_\varepsilon\|_p \leqslant \int \varphi_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{u})\, \|f\|_p\, d\mathbf{u} = \|f\|_p. \tag{7}$$

3) *Если* f *— локально интегрируемая на* R *функция, т. е.* $f \in L(V)$ *для любого шара* $V \subset R$, *то* f_ε *— бесконечно дифференцируемая функция на* R *и для любого целочисленного неотрицательного вектора* $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n)$

$$f_\varepsilon^{(s)}(\mathbf{x}) = \int \varphi_\varepsilon^{(s)}(\mathbf{x} - \mathbf{u})\, f(\mathbf{u})\, d\mathbf{u}.$$

Доказательство. Если f — непрерывная финитная (в R) функция, то это утверждение непосредственно следует из классических теорем о непрерывности интеграла по параметру и дифференцируемости под знаком интеграла. Надо учесть, что $\varphi_\varepsilon(x - u)$ — бесконечно дифференцируемая финитная по u функция.

Пусть теперь f локально интегрируема и $V \subset \overline{V} \subset V_1$ — два произвольных концентрических открытых шара. Будем считать, что радиус V_1 больше радиуса V на $\delta > 0$. Тогда при $\varepsilon < \delta$

$$f_\varepsilon(\mathbf{x}) = \int_{V_1} \varphi_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{u})\, f(\mathbf{u})\, d\mathbf{u}.$$

Положим

$$\psi_\varepsilon(x) = \int_{V_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \varphi_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{u})\, f(\mathbf{u})\, d\mathbf{u}.$$

Так как $f \in L(V_1)$, то существует (см. свойство 18 § 19.3, где $\psi \in L'$; для L' — теорему 1, § 14.4) последовательность непрерывных финитных в V_1 функций f_k такая, что

$$\|f_k - f\|_{L(V_1)} \to 0, \quad k \to \infty.$$

Имеем

$$f_{k\varepsilon}(\mathbf{x}) = \int\limits_{V_1} \varphi_\varepsilon(\mathbf{x}-\mathbf{u}) f_k(\mathbf{u})\,d\mathbf{u}, \quad \frac{\partial}{\partial x_1} f_{k\varepsilon}(\mathbf{x}) = \int\limits_{V_1} \frac{\partial}{\partial x_1}\varphi_\varepsilon(x-\mathbf{u}) f_k(\mathbf{u})\,d\mathbf{u}.$$

Далее, только для $\mathbf{x} \in V$

$$|f_\varepsilon(\mathbf{x}) - f_{k\varepsilon}(\mathbf{x})| = \left| \int\limits_{V_1} \varphi_\varepsilon(\mathbf{x}-\mathbf{u})[f(\mathbf{u}) - f_k(\mathbf{u})]\,d\mathbf{u} \right| \leqslant$$

$$\leqslant M_\varepsilon \|f - f_k\|_{L(V_1)} \to 0, \quad k \to \infty, \qquad (8)$$

$$\left| \psi_\varepsilon(\mathbf{x}) - \frac{\partial}{\partial x_1} f_{k\varepsilon}(\mathbf{x}) \right| \leqslant M_k' \|f - f_k\|_{L(V_1)} \to 0, \quad k \to \infty,$$

$$M_\varepsilon = \max_{\mathbf{u}} \varphi_\varepsilon(\mathbf{x}-\mathbf{u}) = \max_{\mathbf{u}} \varphi_\varepsilon(\mathbf{u}), \quad M_\varepsilon' = \max_{\mathbf{x}} \left| \frac{\partial}{\partial x_1} \varphi_\varepsilon(\mathbf{x}) \right|.$$

Из (8) следует, что функции $f_{k\varepsilon}(\mathbf{x})$ и $\frac{\partial}{\partial x_1} f_{k\varepsilon}(\mathbf{x})$ при $k \to \infty$ равномерно на V стремятся соответственно к f_ε и ψ_ε. Но тогда на основании классической теории f_ε и ψ_ε непрерывны и $\psi_\varepsilon = \frac{\partial}{\partial x_1} f_\varepsilon$ на V, следовательно, в силу произвольности V, и на R (см. теорему 3, § 11.8 сформулированную на языке последовательностей). Этим свойство 3) доказано для $\mathbf{s} = (1, 0, \ldots, 0)$. Общий случай доказывается по индукции.

4) *Если $f \in L_p(\Omega)$ $(1 \leqslant p < \infty)$, то существует последовательность бесконечно дифференцируемых финитных в Ω функций ψ_k, для которых*

$$\|f - \psi_k\|_p \to 0, \quad k \to \infty,$$

$$|\psi_k(\mathbf{x}) \leqslant \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |f(\mathbf{x})|.$$

Доказательство. Зададим $\eta > 0$ и подберем открытое ограниченное множество $g \subset \bar{g} \subset \Omega$ такое, чтобы

$$\|f\|_{L_p(\Omega - g)} < \frac{\eta}{2}.$$

Обозначим через d расстояние от g до границы Ω ($d > 0$; если $\Omega = R_n$, то $d = \infty$). Введем еще функцию

$$f_g(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in g, \\ 0, & \mathbf{x} \notin g, \end{cases}$$

ее ε-усреднение $f_{g,\varepsilon} = \psi$ при $\varepsilon < d$ есть бесконечно дифференцируемая финитная в Ω функция, для которой

$$\|f - f_{g,\varepsilon}\|_{L_p(\Omega)} \leqslant \|f - f_g\|_{L_p(\Omega)} + \|f_g - f_{g,\varepsilon}\|_{L_p(\Omega)} =$$

$$= \|f\|_{L_p(\Omega - g)} + \|f_g - f_{g,\varepsilon}\|_{L_p(\Omega)} < \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta,$$

если только ε достаточно мало.

Далее (см. (7))

$$|f_{g,\varepsilon}(\mathbf{x})| \leqslant \sup_{\mathbf{x}\in R} |f_g(\mathbf{x})| \leqslant \sup_{\mathbf{x}\in R} |f(\mathbf{x})|.$$

Поэтому, если $\eta = \eta_k \to 0$, то, считая $\varepsilon = \varepsilon_k$, $g = g_k$, мы получим, что функции $\psi_k = f_{g_k,\varepsilon_k}$ удовлетворяют требования теоремы.

Свойство 4) усиливает теоремы 3, 4 из § 14.4. Первое его утверждение выражает, что множество *бесконечно дифференцируемых финитных в Ω функций плотно в $L_p(\Omega)$* $(1 \leqslant p < \infty)$.

5) *Неубывающую на $[a, b]$ функцию $f(x)$ можно приблизить с любой степенью точности в метрике $L_p(a, b)$ неубывающей же бесконечно дифференцируемой функцией (вообще говоря, не финитной).*

В самом деле, продолжим $f(x)$ на всю действительную ось, положив

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a - \varepsilon, b + \varepsilon < x, \\ f(a), & a - \varepsilon \leqslant x < a, \\ f(b), & b < x \leqslant b + \varepsilon. \end{cases}$$

Тогда ε-усреднение $f_\varepsilon(x)$ для $x \in [a, b]$ есть функция неубывающая. Ведь для $a \leqslant x < x_1 \leqslant b$, если учесть четность и неотрицательность $\varphi_\varepsilon(u)$, имеет место

$$f_\varepsilon(x) = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \varphi_\varepsilon(u - x) f(u)\, du = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi_\varepsilon(t) f(x + t)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi_\varepsilon(t) f(x_1 + t)\, dt = f_\varepsilon(x_1),$$

потому что при $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ выполняется неравенство $f(x + t) \leqslant f(x_1 + t)$. Бесконечная дифференцируемость $f_\varepsilon(x)$ доказана в 3). Далее, учитывая (1), при $n = 1$

$$\|f(x) - f_\varepsilon(x)\|_{L_p(a,b)} \leqslant \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi_\varepsilon(t) \|f(x) - f(x + t)\|_{L_p(a,b)}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{|t| \leqslant \varepsilon} \|f(x) - f(x + t)\|_{L_p(-\infty,\infty)} \to 0, \quad \varepsilon \to \infty$$

и мы доказали, что f_ε есть приближающая f функция, удовлетворяющая свойству 5).

§ 18.3. Свертка

Эти рассуждения будут проведены в терминах лебеговой теории. Мы будем оперировать с функциями, принадлежащими пространству $L_p = L_p(R_n)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. При конечном p функция $f \in L_p$, если она измерима в лебеговом смысле и для нее конечна