Далее (см. (7))

$$|f_{g,\varepsilon}(\mathbf{x})| \leqslant \sup_{\mathbf{x}\in R} |f_g(\mathbf{x})| \leqslant \sup_{\mathbf{x}\in R} |f(\mathbf{x})|.$$

Поэтому, если $\eta = \eta_k \to 0$, то, считая $\varepsilon = \varepsilon_k$, $g = g_k$, мы получим, что функции $\psi_k = f_{g_k,\varepsilon_k}$ удовлетворяют требования теоремы.

Свойство 4) усиливает теоремы 3, 4 из § 14.4. Первое его утверждение выражает, что множество *бесконечно дифференцируемых финитных в Ω функций плотно в $L_p(\Omega)$* $(1 \leqslant p < \infty)$.

5) *Неубывающую на $[a, b]$ функцию $f(x)$ можно приблизить с любой степенью точности в метрике $L_p(a, b)$ неубывающей же бесконечно дифференцируемой функцией (вообще говоря, не финитной).*

В самом деле, продолжим $f(x)$ на всю действительную ось, положив

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a-\varepsilon,\ b+\varepsilon < x, \\ f(a), & a-\varepsilon \leqslant x < a, \\ f(b), & b < x \leqslant b+\varepsilon. \end{cases}$$

Тогда ε-усреднение $f_\varepsilon(x)$ для $x \in [a, b]$ есть функция неубывающая. Ведь для $a \leqslant x < x_1 \leqslant b$, если учесть четность и неотрицательность $\varphi_\varepsilon(u)$, имеет место

$$f_\varepsilon(x) = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \varphi_\varepsilon(u-x) f(u)\,du = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi_\varepsilon(t) f(x+t)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi_\varepsilon(t) f(x_1+t)\,dt = f_\varepsilon(x_1),$$

потому что при $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ выполняется неравенство $f(x+t) \leqslant f(x_1+t)$. Бесконечная дифференцируемость $f_\varepsilon(x)$ доказана в 3). Далее, учитывая (1), при $n = 1$

$$\|f(x) - f_\varepsilon(x)\|_{L_p(a,b)} \leqslant \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi_\varepsilon(t) \|f(x) - f(x+t)\|_{L_p(a,b)}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{|t|\leqslant\varepsilon} \|f(x) - f(x+t)\|_{L_p(-\infty,\infty)} \to 0, \quad \varepsilon \to \infty$$

и мы доказали, что f_ε есть приближающая f функция, удовлетворяющая свойству 5).

§ 18.3. Свертка

Эти рассуждения будут проведены в терминах лебеговой теории. Мы будем оперировать с функциями, принадлежащими пространству $L_p = L_p(R_n)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. При конечном p функция $f \in L_p$, если она измерима в лебеговом смысле и для нее конечна норма

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int\limits_{R_n} |f(\mathbf{x})|^p\, d\mathbf{x}\right)^{1/p} \quad \left(\int = \int\limits_{R_n}\right).$$

Далее по определению измеримые и ограниченные на R_n функции f с нормой *)

$$\|f\|_{L_\infty} = \sup_{x\in R} |f(\mathbf{x})|$$

составляют пространство L_∞.

Если функция $K(\mathbf{x}) = K(x_1, \ldots, x_n) \in L = L_1$, то для нее имеет смысл свертка, определяемая при помощи интеграла Лебега (см. § 16.8, (16))

$$K * f = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int K(\mathbf{u})\, f(\mathbf{x} - \mathbf{u})\, d\mathbf{u} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int K(\mathbf{x} - \mathbf{u})\, f(\mathbf{u})\, d\mathbf{u}. \quad (1)$$

Интеграл (1), существующий почти для всех $\mathbf{x} \in R_n$, есть функция от $\mathbf{x}$, принадлежащая L_p, и для нее выполняется обобщенное неравенство Минковского (см. § 18.1, (6))

$$\|K * f\|_{L_p} \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int |K(\mathbf{u})|\, \|f(\mathbf{x} - \mathbf{u})\|_{L_p}\, d\mathbf{u} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|K\|_L\, \|f\|_{L_p}, \quad (2)$$

где норма $\|f(\mathbf{x} - \mathbf{u})\|_{L_p} = \|f(x)\|_{L_p}$ берется по $\mathbf{x}$. Неравенство (2) при $p = \infty$ очевидно.

К функции $K * f \in L_p$ можно в свою очередь применить операцию свертки ее с какой-либо функцией $K_1 \in L$, и при этом имеет место коммутативность:

$$K_1 * K * f = K * K_1 * f \quad (K,\ K_1 \in L,\ f \in L_p) \quad (3)$$

(вытекающая из теоремы Фубини, относящейся к лебеговой теории).

Мы определили понятие свертки двух обычных измеримых функций $K \in L$ и $f \in L_p$, и притом в *терминах обычных функций*: свертка $K * f$ есть снова обычная функция, принадлежащая L_p, вычисляемая при помощи интеграла Лебега (1).

Но K, f и $K * f$ суть также обобщенные функции (принадлежащие S'). Таким образом, имеют смысл обобщенные функции $\overleftarrow{K *} f$, $\widehat{K * f} \in S'$, которые не обязательно являются обычными функциями. Но это обстоятельство дает основание по определе-

*) Впрочем, чаще под L_∞ понимают совокупность так называемых существенно ограниченных измеримых на R_n функций с (конечной) нормой

$$\|f\|_\infty = \operatorname{vrai}\sup_{\mathbf{x}\in R} |f(\mathbf{x})|,$$

где справа стоит наименьшее число M, для которого множество $\{x : M < |f(\mathbf{x})|\}$ имеет лебегову меру нуль.

нию положить

$$\widetilde{K}\tilde{f} = \widetilde{K * f} \qquad \widehat{K}\hat{f} = \widehat{K * f}. \tag{4}$$

Отметим, что $\widetilde{K}$ и $\widehat{K}$ — непрерывные функции (ведь $K \in L$).

При помощи первого равенства (4) определяется произведение $\widetilde{K}$ на обобщенную функцию $\tilde{f}$, если $f \in L_p$.

Из определений (4) автоматически следуют равенства

$$K * f = \widehat{\widetilde{K}\tilde{f}} = \widetilde{\widehat{K}\hat{f}} \qquad (K \in L,\ f \in L_p)$$

(обобщающие § 16.8, (16), где предполагалось, что $f \in L'$, $\varphi \in S$).

Заметим, что, если $\hat{\mu} = K \in L$ и в то же время μ — бесконечно дифференцируемая функция полиномиального роста, то в нашем распоряжении имеется два определения произведения $\mu\tilde{f}\ (f \in L_p)$. С одной стороны, это функционал

$$(\hat{\mu}f,\ \varphi) = (\tilde{f},\ \mu\varphi) \qquad (\varphi \in S),$$

а с другой — функционал $\mu\tilde{f} = \widetilde{\hat{\mu} * f}$, как он определен в (4). Покажем, что эти функционалы равны. Если $f \in S$, то равенство

$$(\tilde{f},\ \mu\varphi) = (\widetilde{\hat{\mu} * f},\ \varphi) \qquad (\varphi \in S) \tag{5}$$

есть равенство между интегралами от обычных функций, доказываемое как в § 16.8, (16). Если же $f \in L_p$ — произвольная функция, то найдется сходящаяся к ней в смысле L_p, тем более в смысле (S'), последовательность финитных функций $f_l \in S$ (см. § 18.2, свойство 4). Для каждого $l = 1, 2, \ldots$ имеет место $(\tilde{f}_l,\ \mu\varphi) = (\widetilde{\hat{\mu} * f_l},\ \varphi)\ (\varphi \in S)$. Перейдя к пределу при $l \to \infty$, получим (5). Ведь $f_l \to f(L_p)$ влечет $\hat{\mu} * f_l \to \hat{\mu} * f(L_p)$, тем более в смысле (S'), но тогда и $\widetilde{\hat{\mu} * f_l} \to \widetilde{\hat{\mu} * f}(S')$.

Часто приходится иметь дело со сверткой обобщенной функции $\mathrm{P}.\frac{1}{x} \in S'$ и $f \in L_p$ $(1 < p < \infty$, см. пример 2, § 16.7). Она определяется как предел

$$F(x) = \mathrm{P}.\frac{1}{t} * f = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\varepsilon < |t| < \frac{1}{\varepsilon}} \frac{f(x-t)}{t}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x-t)}{t}\,dt$$

в смысле $L_p = L_p(-\infty, \infty)$. Таким образом,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\| F(x) - \left(\mathrm{P}_\varepsilon.\frac{1}{t} * f\right) \right\|_{L_p} = \lim \left\| (\mathrm{P}. - \mathrm{P}_\varepsilon.)\frac{1}{t} * f \right\|_{L_p} = 0,$$

где

$$\mathrm{P}_{\varepsilon}\cdot\frac{1}{t}=\begin{cases}\dfrac{1}{t} & \left(\varepsilon<|t|<\dfrac{1}{\varepsilon}\right),\\ 0 & (\text{для остальных } t).\end{cases}$$

Можно доказать, что этот предел для любой функции $f\in L_p$ существует, откуда следует, что $F\in L_p$. Больше того, существует константа C_p, зависящая от $p(1<p<\infty)$, но не от f, такая, что выполняется неравенство

$$\|F\|_{L_p}\leqslant C_p\|f\|_{L_p}.$$

Важно отметить, что имеет место коммутативность

$$K*\mathrm{P}.\frac{1}{t}*f=\mathrm{P}.\frac{1}{t}*K*f\quad(K\in L,\ f\in L_p,\ 1<p<\infty).\tag{6}$$

Это следует из равенства

$$K*\mathrm{P}_{\varepsilon}\cdot\frac{1}{t}*f=P_{\varepsilon}\cdot\frac{1}{t}*K*f\quad(\varepsilon>0)$$

$\left(\mathrm{P}_{\varepsilon}\cdot\frac{1}{t}\in L\right)$ путем перехода к пределу в смысле L_p. Ведь

$$\left\|\left(K*\mathrm{P}.\frac{1}{t}*f\right)-\left(K\mathrm{P}*_{\varepsilon}\cdot\frac{1}{t}*f\right)\right\|_{L_p}=$$

$$=\left\|K*(\mathrm{P}.-\mathrm{P}_{\varepsilon}\cdot)\frac{1}{t}*f\right\|_{L_p}\leqslant C_p\left\|(\mathrm{P}.-\mathrm{P}_{\varepsilon}\cdot)\frac{1}{t}*f\right\|_{L_p}\to 0,$$

$$\left\|\left(\mathrm{P}.\frac{1}{t}*K*f\right)-\left(\mathrm{P}_{\varepsilon}\cdot\frac{1}{t}*K*f\right)\right\|_{L_p}=$$

$$=\left\|(\mathrm{P}.-\mathrm{P}_{\varepsilon}\cdot)\frac{1}{t}*(K*f)\right\|_{L_p}\to 0\quad(\varepsilon\to 0).$$

§ 18.4. Разбиение единицы

Лемма 1. *Для любых двух ограниченных открытых множеств g и g' таких, что $g\subset\bar{g}\subset g'$, существует бесконечно дифференцируемая финитная в g' функция $\mu(x)$, равная 1 на g и удовлетворяющая неравенствам* $0\leqslant\varphi(\mathbf{x})\leqslant 1$.

Доказательство. Обозначим через g^{δ} множество всех точек $\mathbf{x}$, расстояние которых до $\bar{g}$ не превышает $\delta(r(\mathbf{x},\bar{g})\leqslant\delta)$. Это очевидно замкнутое множество и при этом $g\subset g^{\delta}\subset g^{2\delta}\subset g'$, если δ достаточно мало. Положим

$$\psi(\mathbf{x})=\begin{cases}1, & \mathbf{x}\in g^{\delta},\\ 0, & \mathbf{x}\notin g^{\delta},\end{cases}\tag{1}$$

$$\mu(\mathbf{x})=\psi_{\delta}(\mathbf{x})=\int\varphi_{\delta}(\mathbf{y}-\mathbf{x})\,\psi(\mathbf{y})\,d\mathbf{y},\tag{2}$$

где, таким образом, $\mu=\psi_{\delta}$ есть δ-усреднение функции ψ.