где
$$\mathrm{P}_{\varepsilon}\cdot\frac{1}{t}=\begin{cases}\frac{1}{t} & \left(\varepsilon<|t|<\frac{1}{\varepsilon}\right),\\ 0 & (\text{для остальных } t).\end{cases}$$

Можно доказать, что этот предел для любой функции $f\in L_p$ существует, откуда следует, что $F\in L_p$. Больше того, существует константа C_p, зависящая от $p(1<p<\infty)$, но не от f, такая, что выполняется неравенство
$$\|F\|_{L_p}\leqslant C_p\|f\|_{L_p}.$$

Важно отметить, что имеет место коммутативность
$$K*\mathrm{P}.\frac{1}{t}*f=\mathrm{P}.\frac{1}{t}*K*f\quad (K\in L,\ f\in L_p,\ 1<p<\infty). \tag{6}$$

Это следует из равенства
$$K*\mathrm{P}_{\varepsilon}\cdot\frac{1}{t}*f=P_{\varepsilon}\cdot\frac{1}{t}*K*f\quad(\varepsilon>0)$$
$\left(\mathrm{P}_{\varepsilon}\cdot\frac{1}{t}\in L\right)$ путем перехода к пределу в смысле L_p. Ведь
$$\left\|\left(K*\mathrm{P}.\frac{1}{t}*f\right)-\left(K\mathrm{P}*_{\varepsilon}\cdot\frac{1}{t}*f\right)\right\|_{L_p}=$$
$$=\left\|K*(\mathrm{P}.-\mathrm{P}_{\varepsilon}\cdot)\frac{1}{t}*f\right\|_{L_p}\leqslant C_p\left\|(\mathrm{P}.-\mathrm{P}_{\varepsilon}\cdot)\frac{1}{t}*f\right\|_{L_p}\to 0,$$
$$\left\|\left(\mathrm{P}.\frac{1}{t}*K*f\right)-\left(\mathrm{P}_{\varepsilon}\cdot\frac{1}{t}*K*f\right)\right\|_{L_p}=$$
$$=\left\|(\mathrm{P}.-\mathrm{P}_{\varepsilon}\cdot)\frac{1}{t}*(K*f)\right\|_{L_p}\to 0\quad(\varepsilon\to 0).$$

§ 18.4. Разбиение единицы

Лемма 1. *Для любых двух ограниченных открытых множеств g и g' таких, что $g\subset\bar g\subset g'$, существует бесконечно дифференцируемая финитная в g' функция* $\mu(x)$, *равная* 1 *на* g *и удовлетворяющая неравенствам* $0\leqslant\varphi(\mathbf{x})\leqslant 1$.

Доказательство. Обозначим через g^{δ} множество всех точек $\mathbf{x}$, расстояние которых до $\bar g$ не превышает $\delta(r(\mathbf{x},\bar g)\leqslant\delta)$. Это очевидно замкнутое множество и при этом $g\subset g^{\delta}\subset g^{2\delta}\subset g'$, если δ достаточно мало. Положим
$$\psi(\mathbf{x})=\begin{cases}1, & \mathbf{x}\in g^{\delta},\\ 0, & \mathbf{x}\notin g^{\delta},\end{cases} \tag{1}$$
$$\mu(\mathbf{x})=\psi_{\delta}(\mathbf{x})=\int\varphi_{\delta}(\mathbf{y}-\mathbf{x})\,\psi(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}, \tag{2}$$
где, таким образом, $\mu=\psi_{\delta}$ есть δ-усреднение функции ψ.

Функция $\mu(\mathbf{x})$, как мы знаем, бесконечно дифференцируема. Кроме того, в силу (1) и того факта, что интеграл (2) фактически берется по шару радиуса δ с центром в $\mathbf{x}$,

$$\mu(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{на } g, \\ 0 & \text{вне } g^{2\delta}. \end{cases}$$

Заметим, что интеграл (2) имеет всегда смысл по Лебегу, по Риману же не всегда, ведь множество g^δ и его пересечение с шаром может оказаться неизмеримым по Жордану.

Учитывая неравенство $0 \leqslant \psi(\mathbf{x}) \leqslant 1$ и неотрицательность φ_δ, получим, наконец,

$$0 \leqslant \mu(\mathbf{x}) \leqslant \int \varphi_\delta(\mathbf{y} - \mathbf{x})\, d\mathbf{y} = 1.$$

Чтобы доказать лемму в терминах интеграла Римана, можно взять сетку, рассекающую R_n на равные кубики диаметра δ, и через Λ обозначить множество кубиков, каждый из которых содержит хотя бы одну точку $\mathbf{x} \in g$. При достаточно малом δ будет $g \subset \Lambda \subset g'$. Дальше можно рассуждать, как выше, заменяя всюду g на Λ. Множество Λ^δ очевидно измеримо по Жордану.

Лемма 2 (о разбиении единицы). *Пусть замкнутое ограниченное множество $F \subset R_n$ покрыто открытыми множествами $g_1, \ldots, g_N$.*

Тогда существует система бесконечно дифференцируемых функций $\varphi_1(\mathbf{x}), \ldots, \varphi_N(\mathbf{x})$ со свойствами:

1) $0 \leqslant \varphi_j(x) \leqslant 1$,
2) φ_j *финитна в* g_j,
3) $\sum_1^N \varphi_j(x) = 1$ *на* F.

Доказательство. Строим открытые множества $g_1', \ldots, g_N'$ такие, что

$$g_j' \subset \overline{g_j'} \subset g_j, \quad \sum_1^N g_j' = G' \supset F;$$

пользуясь предыдущей леммой, определяем бесконечно дифференцируемые неотрицательные функции $\lambda_j(\mathbf{x})$, финитные в g_i, равные 1 на g_j', и полагаем

$$\psi_j(\mathbf{x}) = \frac{\lambda_j(\mathbf{x})}{\lambda_1(\mathbf{x}) + \ldots + \lambda_N(\mathbf{x})}.$$

Очевидно, что функции ψ_j бесконечно дифференцируемы на G' и удовлетворяют условиям $0 \leqslant \psi_j(\mathbf{x}) \leqslant 1$ и $\sum_1^N \psi_j(\mathbf{x}) = 1$ на G'. Однако они не определены в точках $\mathbf{x}$, в которых обращаются в нуль все λ_j. Пользуясь тем, что F — замкнутое ограниченное множество, а $G' \supset F$ — открыто, вводим еще второе открытое множество G'' такое, что $G' \supset \overline{G}'' \supset G'' \supset F$, и бесконечно дифференцируемую функцию $\varkappa(\mathbf{x})$, финитную в G', равную 1 на G'' и удовлетворяющую неравенствам $0 \leqslant \varkappa(\mathbf{x}) \leqslant 1$. Теперь нетрудно проверить, что функции

$$\varphi_j(\mathbf{x}) = \varkappa(\mathbf{x})\psi_j(\mathbf{x}) \qquad (j = 1, \ldots, N)$$

удовлетворяют условиям леммы, если считать, что $\varphi_j(x) = 0$ там, где $\varkappa(\mathbf{x}) = 0$, даже если $\psi_j(x)$ не определена. Свойства 1), 2), 3) легко проверяются. Если $x \in \overline{G}'$, то $x \in \overline{g}'_{j_0}$ при некотором j_0 и $\lambda_{j_0}(\mathbf{x}) = 1$, но тогда в некоторой окрестности x функция ψ_j, а вместе с ней и φ_j, бесконечно дифференцируема. Если же $x \notin \overline{G}'$, то существует окрестность x, где $\varkappa$ тождественно равна нулю, следовательно, φ_j бесконечно дифференцируемы в этой окрестности.