Глава 19

ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

§ 19.1. Мера Лебега

Нашей целью будет ввести понятие (n-мерной) меры Лебега для ограниченных множеств некоторого класса (измеримых по Лебегу множеств). Оно обобщает понятие меры Жордана, потому что всякое измеримое в жордановом смысле множество измеримо по Лебегу и соответствующие меры равны между собой.

В §§ 12.2 и 12.5 были определены понятия $mE = |E|$, m_iE, m_eE — меры, внутренней меры и внешней меры по Жордану. В частности, доказано существование и инвариантность (относительно любых прямоугольных систем координат) внутренней и внешней меры Жордана произвольного ограниченного множества *). Для лебеговой меры внутренней и внешней меры условимся употреблять обозначения $\mu E = |E|$, $\mu_i E$, $\mu_e E$.

Мы будем позволять себе в ходе рассуждений употреблять знак $|E|$ для таких множеств E, для которых уже выяснено, что их лебегова и жорданова меры, если они обе существуют, равны.

Мы будем рассматривать ограниченные множества, принадлежащие n-мерному пространству R_n; поэтому будем говорить о множествах, подразумевая, что они принадлежат R_n и ограничены, и делая соответствующие оговорки, если это не так или если a priori может быть не так.

Так же, как в случае жордановой меры, каждому (ограниченному) множеству E (из R_n) приписывается два числа $\mu_i E$ и $\mu_e E$ — внутренняя и внешняя лебеговы меры E. В случае равенства их число $\mu E = \mu_i E = \mu_e E$ называется *лебеговой мерой* E, а множество E называется *измеримым в лебеговом смысле*. Однако мы начнем с того, что определим понятие лебеговой меры для открытых и замкнутых множеств, минуя пока определение их внешней и внутренней лебеговой меры.

Символами G, G_1, G', G_2, ..., будем обозначать только открытые, а символами F, F_1, F', F_2, ... — только замкнутые множества. Это соглашение дает нам право не всегда оговаривать, что множества, обозначаемые этими символами, открыты или замкнуты. Подобным образом мы будем обозначать через Δ и σ кубы

---

*) Только эти свойства жордановой меры нам будут нужны в этом параграфе.

и соответственно фигуры с ребрами, параллельными осям данной прямоугольной системы координат (см. § 12.2).

Лебегова мера открытого (ограниченного) множества G по определению равна

$$\mu G = m_i G = \sup_{\sigma \subset G} |\sigma|,$$

т. е. верхней грани объемов фигур σ, принадлежащих G.

Открытое множество G можно представить как счетную сумму замкнутых кубов, пересекающихся попарно разве что по своим границам (см. § 12.5, теорема 2),

$$G = \sum_1^{\infty} \Delta_k = \sum \Delta_k, \tag{1}$$

и тогда

$$\mu G = m_i G = \sum |\Delta_k|, \tag{2}$$

где $|\Delta_k|$ — объем Δ_k. Из доказываемой ниже леммы 2 следует, что это число не зависит от способа представления G в виде (1), где Δ_k пересекаются попарно разве что по своим границам.

Лебегова мера замкнутого ограниченного множества F по определению равна

$$\mu F = m_e F = \inf_{\sigma \supset F} |\sigma| \tag{2'}$$

— нижней грани объемов фигур σ, содержащих F.

Оба числа μG и μF инвариантны относительно любой системы прямоугольных координат, потому что числа $m_i G$ и $m_e F$ обладают этим свойством (см. § 12.2 после (6)), откуда, как будет видно ниже, следует инвариантность $\mu_i E$, $\mu_e E$ для произвольного ограниченного множества E, а тогда и μE, если E измеримо в лебеговом смысле.

Докажем несколько простых лемм, устанавливающих некоторые свойства мер замкнутых и открытых множеств.

Лемма 1. *Пусть* $\sigma_k (k = 1, 2, \ldots)$ — *замкнутые фигуры, пересекающиеся попарно разве что по своим границам, а* $\sigma'_k (k = 1, 2, \ldots)$ — *замкнутые фигуры такие, что*

$$\sum \sigma_k \subset \sum \sigma'_k. \tag{3}$$

Тогда

$$\sum |\sigma_k| \leqslant \sum |\sigma'_k|, \tag{4}$$

и неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда $\sum \sigma_k = \sum \sigma'_k$ *и фигуры* σ'_k *пересекаются разве что по своим границам.*

Доказательство. Будем считать, что правая часть неравенства (4) конечна, иначе оно тривиально. Зададим $\varepsilon > 0$ и введем открытые фигуры $\sigma_k'' \supset \sigma_k'$ такие, что

$$\sum |\sigma_k''| < \sum |\sigma_k'| + \varepsilon.$$

Для любого N замкнутое ограниченное множество $\sum_1^N \sigma_k$ покрывается открытыми фигурами σ_k'' и потому среди них можно отобрать конечное их число, $\sigma_{k_1}'', \ldots, \sigma_{k_s}''$, все же покрывающих это множество, и следовательно,

$$\sum_{k=1}^N |\sigma_k| = \left| \sum_1^N \sigma_k \right| \leqslant \sum_{j=1}^s |\sigma_{k_j}''| < \sum |\sigma_k'| + \varepsilon, \tag{5}$$

где в первом соотношении (равенстве) учтен тот факт, что фигуры σ_k пересекаются попарно разве что по своим границам. Так как правая часть (5) не зависит от N, то

$$\sum_1^\infty |\sigma_k| \leqslant \sum_1^\infty |\sigma_k'| +$$

откуда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ получим (4).

Если фигуры σ_k' пересекаются попарно разве что по своим границам и $\sum \sigma_k = \sum \sigma_k'$, то в этом рассуждении можно переменить местами σ_k и σ_k', и тогда очевидно, что (4) есть на самом деле точное равенство. Если же какие-либо фигуры σ_k' и σ_l' пересекаются по невырожденному прямоугольнику, то в этом рассуждении можно заменить σ_l' $(k < l)$ на фигуру $\overline{\sigma_l' - \sigma_k'\sigma_l'}$ и все равно получить (4), откуда видно, что соотношение (4) тогда есть на самом деле строгое неравенство.

Мы будем говорить, что задано открытое (ограниченное) множество

$$G = \sum_k \sigma_k, \quad \mu G = \sum_k |\sigma_k|,$$

где σ_k — замкнутые фигуры (чаще всего $\sigma_k = \Delta_k$ — кубы), и в силу леммы 1 это будет значить, что фигуры σ_k, если пересекаются, то по своим границам. Возможность указанного представления G доказана в § 12.5 (теорема 2). Любые другие представления $G = \sum \sigma_k'$, где σ_k' — фигуры, попарно пересекающиеся разве что по своим границам, приводят в силу леммы 1 к равенству $\mu G = \sum_k |\sigma_k'|$.

Лемма 2. *Пусть G^j, $j = 1, 2, \ldots,$ — конечная или счетная система открытых множеств, принадлежащих некоторому кубу Δ. Тогда сумма $G = \sum_j G^j$ есть открытое множество, для которого выполняется неравенство*

$$\mu G \leqslant \sum_i \mu G^j, \tag{6}$$

обращающееся в равенство тогда и только тогда, когда G^j попарно не пересекаются.

Доказательство. Тот факт, что G открыто, очевиден. Имеют место представления

$$G=\sum_k \Delta_k,\ \mu G=\sum_k |\Delta_k|,\quad G^j=\sum_k \Delta_k^j,\ \mu G^j=\sum_k |\Delta_k^j|,$$

где Δ_k и Δ_k^j — замкнутые кубы. Но тогда $\sum \Delta_k=\sum_j\sum_k \Delta_k^j$, и вследствие леммы 1

$$\mu G=\sum|\Delta_k|\leqslant\sum_j\sum_k|\Delta_k^j|=\sum_j \mu G^j. \tag{7}$$

Если G^j попарно не пересекаются, то и все Δ_k^j могут пересекаться разве что по своим границам, и вследствие леммы 1 имеет место равенство

$$\sum|\Delta_k|=\sum_j\sum_k|\Delta_k^j|,$$

и тогда (6) есть на самом деле равенство. Если же при некоторых s, $j (s\neq j)$ пересечение G^sG^j непусто, то найдутся кубы Δ_μ^s, Δ_ν^j, существенно пересекающиеся, и по лемме 1 соотношение «$\leqslant$» в (7) на самом деле есть строгое неравенство («$<$»), но тогда оно строгое и в (6).

Лемма 3. *Для непересекающихся замкнутых множеств F_1, F_2*

$$\mu(F_1+F_2)=\mu F_1+\mu F_2. \tag{8}$$

Доказательство. В силу замкнутости и ограниченности множеств F_1 и F_2 и того факта, что они не пересекаются (см. § 7.10, упражнение 5), расстояние между ними положительно:

$$\rho=\rho(F_1, F_2)>0.$$

Покроем каждую точку $x\in F_1$ кубом Δ_x с центром в x, замкнутым или открытым, с диаметром меньшим, чем $\rho/2$, и выберем из этих кубов конечное их число все же покрывающих F_1. Сумма этих кубов есть фигура σ_1', покрывающая F_1. Подобным образом построим фигуру σ_2', покрывающую F_2. Фигуры σ_1' и σ_2' очевидно не пересекаются. Теперь зададим $\varepsilon>0$ и подберем такие две фигуры σ_1'', σ_2'', что

$$F_1\subset\sigma_1'',\quad F_2\subset\sigma_2'',\quad |\sigma_1''|\leqslant|\mu F_1|+\varepsilon,\quad |\sigma_2''|\leqslant|\mu F_2|+\varepsilon.$$

Для фигур $\sigma_1=\sigma_1'\sigma_1''$ и $\sigma_2=\sigma_2'\sigma_2''$ очевидно выполняются те же соотношения

$$F_1\subset\sigma_1,\quad F_2\subset\sigma_2,\quad |\sigma_1|\leqslant\mu F_1+\varepsilon,\ |\sigma_2|\leqslant\mu F_2+\varepsilon$$

и, кроме того, они не пересекаются.

Так как $\sigma_1+\sigma_2$ — фигура, содержащая замкнутое множество F_1+F_2, то

$$\mu(F_1+F_2)\leqslant|\sigma_1+\sigma_2|=|\sigma_1|+|\sigma_2|\leqslant\mu F_1+\mu F_2+2\varepsilon. \tag{9}$$

Теперь подберем фигуру $\sigma\supset F_1+F_2$ такую, что $\mu(F_1+F_2)+\varepsilon>$ $>|\sigma|$, откуда

$$\mu(F_1+F_2)+\varepsilon>|\sigma|\geqslant|\sigma(\sigma_1+\sigma_2)|=|\sigma\sigma_1|+|\sigma\sigma_2|\geqslant\mu F_1+\mu F_2, \tag{10}$$

где использован тот факт, что фигуры $\sigma\sigma_1$ и $\sigma\sigma_2$ не пересекаются и содержат в себе соответственно F_1 и F_2. Учитывая, что $\varepsilon>0$ произвольно, из (9) и (10) получаем (8).

Лемма 4. *Если F и G, $F\subset G$,— непустые множества, F — замкнутое ограничение, а G открытое не обязательно ограниченное, то существует фигура σ (замкнутая или открытая) такая, что*

$$F\subset\sigma\subset G,\quad \mu F<|\sigma|<\mu G. \tag{11}$$

Доказательство. Каждую точку $\mathbf{x}\in F$ покроем кубами $\Delta_{\mathbf{x}}^{(1)}\subset\Delta_{\mathbf{x}}^{(2)}\subset\Delta_{\mathbf{x}}^{(3)}\subset G$ с параллельными гранями и с центром в $\mathbf{x}$, длины ребер которых находятся в отношении $\delta_{\mathbf{x}}^{(1)}<\delta_{\mathbf{x}}^{(2)}<\delta_{\mathbf{x}}^{(3)}$. При этом $\Delta_{\mathbf{x}}^{(1)}$ — открытые кубы, а $\Delta_{\mathbf{x}}^{(2)}$ — замкнутые. По лемме Бореля существует конечное число кубов $\Delta_{\mathbf{x}}^{(1)}$, покрывающих F. Пусть это будут кубы $\Delta_{\mathbf{x},1}^{(1)},\ldots,\Delta_{\mathbf{x},N}^{(1)}$. Тогда (замкнутая) фигура

$$\sigma=\sum_{k=1}^{N}\Delta_{\mathbf{x},k}^{(2)} \tag{12}$$

очевидно удовлетворяет требованиям (11), так же как открытая фигура, получаемая из σ выбрасыванием из нее ее границы. Надо учесть, что σ строго внутри себя содержит $\sum_1^N\Delta_{\mathbf{x},k}^{(1)}\supset F$ и содержится строго внутри $\sum_1^N\Delta_{\mathbf{x},k}^{(3)}\subset G$.

Лемма 5. *Для замкнутого множества F, принадлежащего открытому ограниченному множеству G,*

$$\mu(G-F)=\mu G-\mu F. \tag{13}$$

Доказательство. Открытые множества G и $G'=G-F$ представим в виде сумм

$$G=\sum_k\Delta_k,\quad G'=\sum\Delta_k',\quad \mu G=\sum|\Delta_k|,\quad \mu G'=\sum|\Delta_k'|$$

замкнутых кубов. Пусть $\sigma\subset G$ — произвольная фигура, покрывающая F. Тогда $G=\sum\Delta_k\subset\sigma+\sum\Delta_k'$ и в силу леммы 1

$$\mu G=\sum|\Delta_k|\leqslant|\sigma|+\sum|\Delta_k'|=|\sigma|+\mu G'.$$

Отсюда, беря нижнюю грань правой части по всем $\sigma \supset F$, получим

$$\mu G \leqslant \mu F + \mu G'.$$

С другой стороны, множества F и $\sum_1^N \Delta_k'$ замкнуты и не пересекаются, и потому в силу лемм 1 и 4

$$\mu F + \sum_1^N |\Delta_k'| = \mu F + \mu \sum_1^N \Delta_k' = \mu\left(F + \sum_1^N \Delta_k'\right) \leqslant \mu G,$$

откуда

$$\mu F + \mu G' = \mu F + \sum_1^\infty |\Delta_k'| \leqslant \mu G,$$

и мы доказали (13).

Пусть теперь E есть произвольное (ограниченное) множество.

По определению *внутренняя лебегова мера* E есть верхняя грань $\mu_i E = \sup\limits_{F \subset E} \mu F$ лебеговых мер принадлежащих E замкнутых множеств. Существование этой верхней грани вытекает из того, что E можно поместить в замкнутый куб Δ, и тогда $F \subset E \subset \Delta$,

$$\mu F = m_e F \leqslant |\Delta|.$$

По определению *внешняя лебегова мера* E есть нижняя грань $\mu_e E = \inf\limits_{G \supset E} \mu G$ лебеговых мер открытых множеств, содержащих E. Существование $\mu_e E \geqslant 0$ очевидно, потому что $\mu G \geqslant 0$.

По определению множество E называется *измеримым по Лебегу*, если его внутренняя и внешняя меры равны между собой, и в этом случае число $\mu E = \mu_i E = \mu_e E$ называется *лебеговой мерой* E или *мерой* E *в смысле Лебега.*

Имеют место неравенства

$$m_i E \leqslant \mu_i E \leqslant \mu_e E \leqslant m_e E. \tag{14}$$

Чтобы обосновать их, заметим, что жорданова внешняя мера $m_e E$ может быть рассматриваема как нижняя грань объемов открытых фигур $\sigma \supset E$. Результат будет тот же, будем ли мы при вычислении внешней меры Жордана $m_e E$ варьировать открытыми или замкнутыми $\sigma \supset E$. Но открытые $\sigma \supset E$ суть частные случаи открытых множеств $G \supset E$, поэтому $\mu_e E \leqslant m_e E$. Внутреннюю меру Жордана $m_i E$ мы уже будем рассматривать как верхнюю грань объемов замкнутых $\sigma \subset E$, и так как такие σ суть частные случаи замкнутых множеств $F \subset E$, то $m_i E \leqslant \mu_i E$.

Из (14) следует, что *если* E *измеримо по Жордану, то* E *измеримо и по Лебегу и* $mE = \mu E$.

Теперь нетрудно видеть, что множества F и G измеримы в лебеговом смысле *). Это следует из (14) и равенств **)

$$m_i G = \mu G = \mu_e G, \quad \mu_i F = \mu F = m_e F.$$

В § 12.3 были рассмотрены важные примеры множеств жордановой, следовательно, и лебеговой, меры нуль.

Теорема 1. *Множество E измеримо тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существуют множества F, G такие, что*

$$F \subset E \subset G, \quad \mu G - \mu F < \varepsilon. \tag{15}$$

Доказательство. Из существования указанных множеств F, G следует, что

$$\mu F \leqslant \mu_i E \leqslant \mu_e E \leqslant \mu G,$$

откуда $\varepsilon > \mu_e E - m_i E$, и так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то $\mu_i E = \mu_e E$. Наоборот, если E измеримо, то для любого $\varepsilon > 0$ найдутся множества F и G такие, что

$$F \subset E \subset G, \quad \mu E - \frac{\varepsilon}{2} < \mu F \leqslant \mu E \leqslant \mu G < \mu E + \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда выполняется (15).

Теорема 2. *Вместе с E_1 и E_2 измеримы по Лебегу также их сумма, разность и пересечение.*

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$ и подберем множества F_1, F_2, G_1, G_2, так, чтобы выполнялись соотношения (см. теорему 1 и лемму 5)

$$F_1 \subset E_1 \subset G_1, \ \mu G_1 - \mu F_1 = \mu(G_1 - F_1) < \varepsilon,$$
$$F_2 \subset E_2 \subset G_2, \ \mu G_2 - \mu F_2 = \mu(G_2 - F_2) < \varepsilon.$$

Отсюда

$$F_1 + F_2 \subset E_1 + E_2 \subset G_1 + G_2, \tag{16}$$
$$F_1 - G_2 \subset E_1 - E_2 \subset G_1 - F_2, \ F_1 F_2 \subset E_1 E_2 \subset G_1 G_2.$$

Теперь утверждения теоремы вытекают из следующих выкладок (пояснения ниже):

$$\mu(G_1 + G_2) - \mu(F_1 + F_2) = \mu((G_1 + G_2) - (F_1 + F_2)) \leqslant$$
$$\leqslant \mu((G_1 - F_1) + (G_2 - F_2)) \leqslant \mu(G_1 - F_1) + \mu(G_2 - F_2) < 2\varepsilon,$$
$$\mu(G_1 - F_2) - \mu(F_1 - G_2) = \mu((G_1 - F_2) - (F_1 - G_2)) \leqslant$$
$$\leqslant \mu((G_1 - F_1) + (G_2 - F_2)) \leqslant \mu(G_1 - F_1) + \mu(G_2 - F_2) < 2\varepsilon,$$
$$\mu G_1 G_2 - \mu F_1 F_2 = \mu(G_1 G_2 - F_1 F_2) \leqslant \mu(G_1(G_2 - F_2)) +$$
$$+ \mu(F_2(G_1 - F_1)) \leqslant \mu(G_2 - F_2) + \mu(G_1 - E_1) < 2\varepsilon.$$

*) Хотя множества F и G не обязательно измеримы по Жордану (см. § 19.7).

**) Ведь, например, $\mu G_0 = m_i G_0$, $\mu_e G_0 = \inf\limits_{G \supseteq G_0} \mu G$.

Первые соотношения (равенства) в этих цепях справедливы на основании леммы 5, если учесть, что правые части (16) суть открытые множества, а левые — замкнутые. Вторые соотношения (неравенства) в этих цепях следуют соответственно из леммы 2 и следующих множественных вложений *):

$$\left.\begin{array}{l}\text{а) } G_1+G_2-(F_1+F_2)\\ \text{б) } (G_1-F_2)-(F_1-G_2)\\ \text{в) } G_1G_2-F_1F_2\end{array}\right\}\subset(G_1-F_1)+(G_2-F_2).$$

Заметим впрочем, что измеримость E_1E_2 вытекает из измеримости E_1+E_2 и E_1-E_2. Ведь если Δ — куб, содержащий E_1+E_2, то

$$E_1E_2=\Delta-[(\Delta-E_1)+(\Delta-E_2)].$$

Теорема 3. *Если множества E_1 и E_2 измеримы по Лебегу и пересечение их пусто* **) $(E_1E_2=0)$, *то*

$$\mu(E_1+E_2)=\mu E_1+\mu E_2. \qquad (17)$$

Доказательство. Зададим $\varepsilon>0$ и подберем множества F_1, F_2, G_1, G_2 так, что

$$F_1\subset E_1\subset G_1,\quad F_2\subset E_2\subset G_2,$$
$$\mu E_1-\varepsilon<\mu F_1,\quad \mu G_1<\mu E_1+\varepsilon,$$
$$\mu E_2-\varepsilon<\mu F_2,\quad \mu G_2<\mu E_2+\varepsilon.$$

Так как $F_1+F_2\subset E_1+E_2\subset G_1+G_2$, то (см. лемму 2)

$$\mu(E_1+E_2)\leqslant\mu(G_1+G_2)\leqslant\mu G_1+\mu G_2\leqslant\mu E_1+\mu E_2+2\varepsilon. \qquad (18)$$

Далее,

$$\mu E_1+\mu E_2\leqslant\mu F_1+\mu F_2+2\varepsilon=\mu(F_1+F_2)+2\varepsilon\leqslant\mu(E_1+E_2)+2\varepsilon \qquad (19)$$

(ведь F_1 и F_2 замкнуты и $F_1F_2=0$; см. лемму 3).

Из (18), (19) в силу произвольности $\varepsilon>0$ вытекает (17).

---

*) Чтобы доказать эти вложения обозначим через A, B соответственно их левую, правую части.

а) Пусть $x\in A$, тогда $x\in G_1+G_2$ и одновременно $x\notin F_1$, $x\notin F_2$. Поэтому, если $x\in G_1$, то $x\in G_1-F_1\subset B$, а если $x\in G_2$, то $x\in G_2-F_2\subset B$.

б) Пусть $x\in A$, тогда $x\in G_1$, $x\notin F_2$, $x\notin F_1-G_2$. Поэтому при $x\in G_2$ имеем $x\in G_2-F_2\subset B$, а при $x\notin G_2$ в силу условия $x\notin F_1-G_2$ придется заключить, что $x\notin F_1$ и тогда $x\in G_1-F_1\subset B$.

в) Пусть $x\in A$, тогда $x\in G_1G_2$, $x\notin F_1F_2$, т. е. во всяком случае верно одно из соотношений $x\notin F_1$, $x\notin F_2$. Если верно первое, то $x\in G_1-F_1\subset\subset B$, если же второе, то $x\in G_2-F_2\subset B$.

**) Равенство (17) верно и в случае, когда E_1E_2 хотя и не пусто, но $\mu(E_1E_2)=0$. Ведь тогда $\mu(E_1+E_2)=\mu(E_1+(E_2-E_1E_2))=\mu E_1+\mu(E_2-E_1E_2)=\mu E_1+\mu E_2-\mu(E_1E_2)=\mu E_1+\mu E_2$ (см. теорему 3 и далее теорему 4).

По индукции с помощью теорем 2 и 3 легко доказывается, что если $e_1, \ldots, e_N$ — измеримые в лебеговом смысле попарно не пересекающиеся множества, то их сумма тоже измерима по Лебегу и

$$\mu(e_1 + \ldots + e_N) = \mu e_1 + \ldots + \mu e_N.$$

Теорема 4. *Если E_1 и E_2 измеримы по Лебегу и $E_1 \supset E_2$, то*

$$\mu(E_1 - E_2) = \mu E_1 - \mu E_2. \tag{20}$$

Доказательство. Измеримость $E_1 - E_2$ уже установлена в теореме 2. Само же по себе равенство (20) следует из теоремы 3.

Теорема 5. *Ограниченное множество*

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} e_k = e_1 + e_2 + e_3 + \ldots, \tag{21}$$

где e_k измеримы по Лебегу и попарно не пересекаются, измеримо в лебеговом смысле и

$$\mu E = \sum_{k=1}^{\infty} \mu e_k. \tag{22}$$

Доказательство. Так как множество E ограничено, то для него имеют смысл его внутренняя и внешняя меры $\mu_i E$, $\mu_e E$. Поэтому при любом натуральном N

$$\sum_1^N \mu e_k = \mu\left(\sum_1^N e_k\right) = \mu_i\left(\sum_1^N e_k\right) \leqslant \mu_i E$$

$\left(\text{ведь } \sum\limits_1^N e_k \subset E\right)$. Отсюда следуют сходимость ряда (22) и неравенство

$$\sum_1^{\infty} \mu e_k \leqslant \mu_i E. \tag{23}$$

С другой стороны, так как E ограничено, то можно считать, что оно принадлежит некоторому открытому кубу Δ, и для всякого $\varepsilon > 0$ и любого натурального k найдется множество $G_k \subset \Delta$ такое, что

$$e_k \subset G_k, \quad \mu G_k < \mu e_k + \varepsilon \cdot 2^{-k} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Отсюда в силу того, что $\sum\limits_1^{\infty} G_k \subset \Delta$ есть открытое множество, получим (см. лемму 2)

$$\mu_e E \leqslant \mu\left(\sum_1^{\infty} G_k\right) \leqslant \sum_1^{\infty} \mu G_k \leqslant \sum_1^{\infty} \mu e_k + \varepsilon \sum_1^{\infty} 2^{-k} = \sum_1^{\infty} \mu e_k + \varepsilon.$$

И так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то (см. 23))

$$\mu_e E \leqslant \sum_1^\infty \mu e_e \leqslant \mu_i E.$$

Но тогда, учитывая, что $\mu_i E \leqslant \mu_e E$, мы доказали измеримость E и равенство (22).

Теореме 5 можно придать другую эквивалентную формулировку.

Теорема 6. *Пусть задана (неубывающая) последовательность измеримых множеств*,

$$E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \ldots, \quad E = \bigcup_{k=1}^\infty E_k,$$

сумма которых E ограничена. Тогда E — измеримое множество и

$$\lim_{k\to\infty} \mu E_k = \mu E.$$

Доказательство. Положим $e_1 = E_1$, $e_N = E_N - E_{N-1}$ ($N = 2, 3, \ldots$), тогда e_k измеримы, попарно не пересекаются и

$$\bigcup_{k=1}^\infty e_k = E.$$

Но тогда по теореме 5 множество E измеримо и

$$\mu E_N = \mu(e_1 + \ldots + e_N) = \sum_{k=1}^N \mu e_k \to \mu E, \quad N \to \infty.$$

Отметим еще одну теорему, сводящуюся к теоремам 6 и 4.

Теорема 7. *Пусть задана (невозрастающая) последовательность измеримых множеств:*

$$E_1 \supset E_2 \supset \ldots, \quad E = \bigcap_{k=1}^\infty E_k.$$

Тогда E измеримо и $\mu E = \lim\limits_{n\to\infty} \mu E_n$.

Доказательство. В самом деле,

$$E = \bigcap_{k=1}^\infty E_k = E_1 - \bigcup_{k=1}^\infty (E_1 - E_k),$$

и тогда (пояснения ниже)

$$\mu E = \mu E_1 - \mu \bigcup_{k=1}^\infty (E_1 - E_k) = \mu E_1 - \lim_{k\to\infty} \mu(E_1 - E_k) = \lim_{k\to\infty} \mu E_k.$$

Ведь множества $E_1 - E_k \subset E_1$ измеримы и не убывают, и сумма их по теореме 6 измерима, а ее лебегова мера есть

$$\lim_{k\to\infty} \mu(E_1 - E_k) = \mu E_1 - \lim_{k\to\infty} \mu E_k.$$

При этом из существования предела слева следует существование предела справа.

Теорема 8. *Конечная или счетная ограниченная сумма измеримых множеств $E_1, E_2, \ldots$ измерима и*

$$\mu\Big(\bigcup_k E_k\Big) \leqslant \sum_k \mu E_k. \qquad (24)$$

Доказательство. Измеримость суммы (24) следует из равенства

$$\bigcup_k E_k = E_1 + (E_2 - E_1) + (E_3 - E_1 - E_2) + \ldots, \qquad (25)$$

где справа слагаемые — измеримые попарно не пересекающиеся множества. Далее, мы знаем, что мера множества слева в (25) в точности равна сумме мер множеств, входящих в ряд справа, но мера k-го такого множества, очевидно, не превышает μE_k, откуда следует (24).

Теорема 9. *Пересечение конечного или счетного числа измеримых множеств $E_1, E_2, \ldots$ измеримо.*

Доказательство. Это следует из теорем 2 и 8, если учесть, что

$$\bigcap_k E_k = E_1 - \bigcup_k (E_1 - E_k).$$

Отметим, что множество, состоящее из одной точки (пространства R_n), измеримо в жордановом и лебеговом смысле и имеет меру нуль. Счетное ограниченное множество (точек R_n) на основании теоремы 5 есть измеримое множество по Лебегу (меры нуль), но, вообще говоря, не по Жордану. Например, множество Δ' рациональных точек, принадлежащих кубу Δ, имеет Лебегову меру нуль, но оно не измеримо в жордановом смысле. Множество точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \Delta$, не все координаты которых рациональны, имеет, очевидно, лебегову меру, равную $|\Delta|$.

Отметим еще, что если множество E измеримо по Жордану, то присоединение к нему его границы сохраняет меру ($mE = m\bar{E}$), но это уже не так в случае лебеговой меры, например, для рассмотренных выше множеств Δ' и Δ имеет место $\mu\Delta' = 0$, $\Delta = \bar{\Delta}'$, $|\Delta| > 0$.

§ 19.2. Измеримые функции

Мы будем называть измеримые по Лебегу множества E ($E \subset R_n$) просто измеримыми. Они всегда ограничены.

По определению функция $f = f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *измеримой на множестве E* ($E \subset R_n$), если E измеримо,