При этом из существования предела слева следует существование предела справа.

Теорема 8. *Конечная или счетная ограниченная сумма измеримых множеств E_1, E_2, ... измерима и*

$$\mu\left(\bigcup_k E_k\right) \leqslant \sum_k \mu E_k. \tag{24}$$

Доказательство. Измеримость суммы (24) следует из равенства

$$\bigcup_k E_k = E_1 + (E_2 - E_1) + (E_3 - E_1 - E_2) + \ldots, \tag{25}$$

где справа слагаемые — измеримые попарно не пересекающиеся множества. Далее, мы знаем, что мера множества слева в (25) в точности равна сумме мер множеств, входящих в ряд справа, но мера k-го такого множества, очевидно, не превышает μE_k, откуда следует (24).

Теорема 9. *Пересечение конечного или счетного числа измеримых множеств E_1, E_2, ... измеримо.*

Доказательство. Это следует из теорем 2 и 8, если учесть, что

$$\bigcap_k E_k = E_1 - \bigcup_k (E_1 - E_k).$$

Отметим, что множество, состоящее из одной точки (пространства R_n), измеримо в жордановом и лебеговом смысле и имеет меру нуль. Счетное ограниченное множество (точек R_n) на основании теоремы 5 есть измеримое множество по Лебегу (меры нуль), но, вообще говоря, не по Жордану. Например, множество Δ' рациональных точек, принадлежащих кубу Δ, имеет Лебегову меру нуль, но оно не измеримо в жордановом смысле. Множество точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \Delta$, не все координаты которых рациональны, имеет, очевидно, лебегову меру, равную $|\Delta|$.

Отметим еще, что если множество E измеримо по Жордану, то присоединение к нему его границы сохраняет меру ($mE = m\bar{E}$), но это уже не так в случае лебеговой меры, например, для рассмотренных выше множеств Δ' и Δ имеет место $\mu\Delta' = 0$, $\Delta = \overline{\Delta'}$, $|\Delta| > 0$.

§ 19.2. Измеримые функции

Мы будем называть измеримые по Лебегу множества E ($E \subset R_n$) просто измеримыми. Они всегда ограничены.

По определению функция $f = f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *измеримой на множестве E* ($E \subset R_n$), если E измеримо,

f конечна *) на E и для любого (действительного) числа A множество

$$\{\mathbf{x}:\ \mathbf{x}\in E,\ f(\mathbf{x})<A\}=\{f<A\} \tag{1}$$

(точек $\mathbf{x}\in E$, где $f(\mathbf{x})<A$) измеримо.

Запись справа в (1) не выражает явно, что речь идет о точках $\mathbf{x}\in E$,— это подразумевается. В этом духе надо понимать и другие подобные приводимые ниже записи.

Пусть $A<B$ — произвольные числа. Имеют место очевидные множественные равенства:

$$\{f\leqslant A\}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\left\{f<A+\frac{1}{k}\right\}, \tag{2}$$

$$\{f=A\}=\{f\leqslant A\}-\{f<A\}, \tag{3}$$

$$\{A\leqslant f\}=E-\{f<A\}, \tag{4}$$

$$\{A<f\}=\{A\leqslant f\}-\{A=f\}, \tag{5}$$

$$\{A<f<B\}=\{f<B\}-\{f\leqslant A\}, \tag{6}$$

$$\{A\leqslant f<B\}=\{f<B\}-\{f<A\}, \tag{7}$$

$$\{A\leqslant f\leqslant B\}=\{A\leqslant f<B\}+\{f=B\}, \tag{8}$$

$$\{A<f\leqslant B\}=\{A<f<B\}+\{f=B\}. \tag{9}$$

Измеримость f на E влечет измеримость любого из множеств, фигурирующих в левых частях этих неравенств. В самом деле, из измеримости каждого из множеств

$$\left\{f<A+\frac{1}{k}\right\}=\left\{\mathbf{x}:\mathbf{x}\in E,\ f(\mathbf{x})<A+\frac{1}{k}\right\}\ (k=1,2,\ldots)$$

следует в силу (2) измеримость их пересечения, равного $\{f\leqslant A\}$. Теперь уже измеримы уменьшаемое и вычитаемое в (3), поэтому измерима разность. Так постепенно доказываются (4), ..., (9).

Важно отметить, что измеримость любого из множеств (при произвольных A и B), фигурирующих в левых частях соотношений (2)—(9), кроме (3), влечет измеримость f на E (если E измеримо). Например, пусть известно, что E измеримо, и для любого числа A множество $\{f\leqslant A\}$ измеримо. Тогда очевидно, что измеримо множество

$$\{f<A\}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\left\{f\leqslant A-\frac{1}{k}\right\}.$$

*) Мы считаем, что $f(\mathbf{x})$ для любого $\mathbf{x}\in E$ есть число (конечное число). Случай, когда функции f разрешается принимать значения $\pm\infty$ (или ∞), интересен, когда f есть предел или верхний или нижний предел последовательности конечных на E функций. Этот случай разбирается ниже в теореме 2. Если в каком-либо вопросе удобно приписывать $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}\in E$, не только конечные значения, но и бесконечные $+\infty$, $-\infty$ (или ∞), то тогда естественно считать функцию f измеримой на E, если в отдельности измеримы множества $\{f=+\infty\}$, $\{f=-\infty\}$ {или $f=\infty$}, а на оставшейся части E конечная функция f измерима в указанном выше смысле.

Или, например, пусть E измеримо и измеримы все множества $\{A < f < B\}$, каковы бы ни были A, B, $A < B$. Тогда множество

$$\{f < A\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{A - k < f < A\}$$

измеримо как сумма счетного числа измеримых множеств.

Функция f, непрерывная на замкнутом ограниченном множестве F или открытом ограниченном множестве G, измерима на нем.

В самом деле, F и G измеримы. Кроме того, для любого A множество $\{\mathbf{x}\colon \mathbf{x} \in F,\ f(\mathbf{x}) \leqslant A\}$ замкнуто и ограничено, следовательно, измеримо, а множество $\{\mathbf{x}\colon \mathbf{x} \in G,\ f(\mathbf{x}) < A\}$ открыто и ограничено, следовательно, измеримо.

Справедливы следующие утверждения:

Если $e \subset E$ измеримо и f измерима на E, то f измерима и на e.

Ведь множество $\{\mathbf{x}\colon \mathbf{x} \in e,\ f(\mathbf{x}) < A\}$ есть пересечение двух измеримых множеств e и $\{\mathbf{x}\colon \mathbf{x} \in E,\ f(\mathbf{x}) < A\}$.

Если f измерима на каждом из множеств e_k $(k = 1, 2, \ldots)$ и сумма $E = \sum\limits_k e_k$ ограничена, то f также измерима на E.

Ведь E измеримо как ограниченная сумма измеримых e_k. Кроме того, множество $\{\mathbf{x}\colon \mathbf{x} \in E,\ f(\mathbf{x}) < A\}$ ограничено и есть сумма измеримых множеств $\{\mathbf{x}\colon \mathbf{x} \in e_k,\ f(\mathbf{x}) < A\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Теорема 1. *Вместе с f и φ измеримы на E функции*

$$1)\ f + \varphi,\quad 2)\ -\varphi,\quad 3)\ f\varphi,\quad 4)\ 1/\varphi,$$

в предположении в случае 4), что $\varphi(x) \neq 0$ для всех $\mathbf{x} \in E$.

Доказательство. 1) Зададим число A. Имеет место равенство

$$\{f + \varphi < A\} = \bigcup_{r+\rho<A} \{f < r\}\{\varphi < \rho\}, \tag{10}$$

где сумма распространена на все пары рациональных чисел r, ρ, сумма которых меньше A. В самом деле, если $\mathbf{x} \in E$, $f(\mathbf{x}) < r$, $\varphi(\mathbf{x}) < \rho$, $r + \rho < A$, то $f(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{x}) < A$ и правая часть (10) принадлежит к левой. Если же $\mathbf{x} \in E$, $f(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{x}) < A$ и $\delta = A - f(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})$, то существуют рациональные числа r и ρ, большие соответственно, чем $f(\mathbf{x})$ и $\varphi(\mathbf{x})$, на величину меньшую, чем $\delta/2$, и тогда $f(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{x}) < r + \rho < A$, т. е. левая часть (10) содержится в правой. Так как пары (r, ρ) рациональных чисел, для которых $r + \rho < A$, образуют счетное множество, то из измеримости f и φ на E следует, что правая часть (10) есть измеримое множество, таким образом, и левая есть измеримое множество.

2) Следует из равенства $\{-\varphi < A\} = \{\varphi > -A\}$.

3) Пусть $f(\mathbf{x}),\ \varphi(\mathbf{x}) \geqslant 0$ для всех $\mathbf{x} \in E$. Если $A \leqslant 0$, то множество $\{f\varphi < A\}$ пусто, следовательно, измеримо. Пусть теперь

$A>0$. Если $f(\mathbf{x})<r$, $\varphi(\mathbf{x})<\rho$, $r\rho<A$, то $f(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})<A$. Наоборот, если $f(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})<A$, то можно подобрать рациональные r, $\rho>0$ такие, что $r\rho<A$ и $f(\mathbf{x})<r$, $\varphi(\mathbf{x})<\rho$. Поэтому

$$\{f\varphi<A\}=\bigcup_{\substack{r\rho<A\\ r,\rho>0}}\{f<r\}\{\varphi<\rho\}, \tag{11}$$

и правая часть (11), а с ней и левая, измеримы.

Отсюда легко следует измеримость $\{f\varphi<A\}$, если каждая из функций f, φ сохраняет знак на E.

Общий случай сводится к указанным четырем путем представления

$$\{f\varphi<A\}=\{f\varphi<A;\ f,\ \varphi\geqslant 0\}+\{f\varphi<A;\ f\geqslant 0,\ \varphi\leqslant 0\}+\\ +\{f\varphi<A;\ f\leqslant 0,\ \varphi\geqslant 0\}+\{f\varphi<A;\ f,\ \varphi\leqslant 0\}.$$

4) Если $\varphi(\mathbf{x})>0$ для всех $\mathbf{x}\in E$, то при $A\leqslant 0$ множество $\{1/\varphi<A\}$ пусто, таким образом, измеримо, а при $A>0$ это следует из равенства $\{1/\varphi<A\}=\{1/A<\varphi\}$. Подобным образом рассматривается случай, когда $\varphi(\mathbf{x})<0$ на E. Общий случай сводится к этим двум путем представления

$$\left\{\frac{1}{\varphi}<A\right\}=\left\{\frac{1}{\varphi}<A;\ \varphi>0\right\}+\left\{\frac{1}{\varphi}<A;\ \varphi<0\right\}.$$

Теорема 2. *Верхний предел последовательности $f_n(x)$ измеримых на E конечных функций*

$$\psi(\mathbf{x})=\varlimsup_{n\to\infty} f_n(\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}\in E, \tag{12}$$

есть функция, измеримая на E в смысле приведенного в ссылке в начале этого параграфа определения.

Доказательство. Множество E распадается на три попарно не пересекающиеся множества

$$E=E_0+E_++E_-, \tag{13}$$

где

$$\psi(\mathbf{x})=\begin{cases}\text{конечна на } E_0,\\ +\infty \text{ на } E_+,\\ -\infty \text{ на } E_-.\end{cases} \tag{14}$$

Пусть $\psi(\mathbf{x})$ конечна на E (т. е. $E_+=E_-=0$). Тогда для любого действительного числа A и натурального k имеют место вложения

$$\left\{\psi<A-\frac{1}{k}\right\}\subset\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}\left\{f_n<A-\frac{1}{k}\right\}\subset\left\{\psi\leqslant A-\frac{1}{k}\right\}. \tag{15}$$

Ведь если $\mathbf{x}\in\left\{\psi<A-\dfrac{1}{k}\right\}$, то, в силу (12), для некоторого N

выполняется неравенство

$$f_n(x) < A - \frac{1}{k}, \quad n \geqslant N, \tag{16}$$

и потому

$$\mathbf{x} \in \bigcap_{n=N}^{\infty} \left\{f_n < A - \frac{1}{k}\right\}. \tag{17}$$

Тем более x принадлежит множеству, стоящему в середине цепи (15). Далее, если x принадлежит этому последнему множеству, то для некоторого N для него выполняется (17), т. е. (16), и так как имеет место (12), то $\psi(\mathbf{x}) \leqslant A - \frac{1}{k}$, и мы доказали, что x принадлежит множеству, стоящему в правой части (15).

Легко видеть, что (см. (15))

$$\{\psi < A\} = \bigcup_k \left\{\psi < A - \frac{1}{k}\right\} = \bigcup_k \left\{\psi \leqslant A - \frac{1}{k}\right\} =$$
$$= \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \left\{f_n < A - \frac{1}{k}\right\}. \tag{18}$$

По вследствие измеримости функций f_n на E правая часть (18) — измеримое множество, значит, и левая — измеримое множество.

Перейдем к общему случаю, когда E_+, E_-, вообще говоря, непусты. Для $x \in E_-$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(\mathbf{x}) = \lim_{n\to\infty} f_n(\mathbf{x}) = -\infty, \tag{19}$$

откуда следует равенство

$$E_- = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \{f_n < -k\}, \tag{20}$$

показывающее, что E_- измеримо. В самом деле, если $\mathbf{x} \in E_-$, то для любого натурального k найдется натуральное N такое, что

$$f_n(\mathbf{x}) < -k, \quad n \geqslant N \tag{21}$$

т. е.

$$\mathbf{x} \in \bigcap_{n=N}^{\infty} \{f_n < -k\}, \tag{22}$$

тем более

$$\mathbf{x} \in \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \{f_n < -k\}, \tag{23}$$

и так как этот факт имеет место при любом k, то x принадлежит правой части (20). Наоборот, из принадлежности x правой части (20) следует, что при любом k имеет место (23), а при некотором N — и (22), т. е. (21), таким образом, (19), и правая часть (20) принадлежит левой.

Наконец, имеет место равенство

$$E_+ = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcap_{s=1}^{\infty} \bigcup_{n=s}^{\infty} \{f_n > k\}, \tag{24}$$

показывающее, что E_+ измеримо. Действительно, если $\mathbf{x} \in E_+$, то для любого k найдется N такое, что

$$f_n(\mathbf{x}) > k \tag{25}$$

для бесконечного числа значений $n > N$, тогда

$$\mathbf{x} \in \bigcap_{s=1}^{\infty} \bigcup_{n=s}^{\infty} \{f_n > k\} \tag{26}$$

для любого k, т. е. $\mathbf{x}$ принадлежит правой части (24). Наоборот, если имеет место это последнее свойство, то справедливо и (26) при любом k, поэтому при любом k выполняется неравенство (25) для бесконечного числа значений n, т. е. $\mathbf{x} \in E_+$.

Итак, E_+ и E_- измеримы, но тогда $E_0 = E - E_+ - E_-$ измеримо, и так как функция ψ на E_0 конечна, то ψ измерима в смысле введенного выше определения, и теорема доказана.

Замечание. В теореме 2 можно верхний предел заменить на нижний предел, потому что

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varliminf_{n\to\infty} f_n(\mathbf{x}) = -\varlimsup_{n\to\infty} (-f_n(\mathbf{x})),$$

а функции $h(\mathbf{x})$ и $-h(\mathbf{x})$ измеримы одновременно.

Пусть E_0 имеет прежний смысл, а E_0' — множество, где φ конечна. Функция $\psi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})$ измерима на множестве E_0E_0', из которого можно выделить важное измеримое подмножество

$$E_* = \{\psi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}) = 0\}$$

точек $\mathbf{x} \in E$, для которых существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}).$$

Определение. Последовательность конечных измеримых на E функций f_k *сходится* к измеримой на E функции f *по мере*, если для любого $\delta > 0$ мера множества

$$e_k = \{\mathbf{x} \in E : |f(\mathbf{x}) - f_k(\mathbf{x})| > \delta\} \tag{27}$$

стремится к нулю ($\mu e_k \to 0$, $k \to \infty$).

Теорема 3. *Если последовательность конечных измеримых на E функций f_k сходится на E к конечной функции f, то она сходится также к f по мере.*

Доказательство. В самом деле, если бы это было не так, то для некоторого $\delta > 0$ нашлись бы число $\lambda > 0$ и последовательность индексов $k_1, k_2, \ldots$ такие, что $\mu e_{k_j} \geqslant \lambda$. Положим

$$e = \bigcap_{s=1}^{\infty} (e_{k_s} + e_{k_{s+1}} + \ldots),$$

тогда

$$\mu e = \lim_{s\to\infty} \mu(e_{k_s} + e_{k_{s+1}} + \ldots) \geqslant \underline{\lim}_{s\to\infty} \mu e_{k_s} \geqslant \lambda,$$

и, таким образом, e — непустое множество. Но точка $\mathbf{x} \in e$ принадлежит, очевидно, бесконечной последовательности множеств $e_{\nu_1}, e_{\nu_2}, e_{\nu_3}, \ldots$ $(\nu_1 < \nu_2 < \ldots)$, и потому

$$|f_{\nu_s}(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| > \delta.$$

Но это противоречит тому, что

$$\lim_{k\to\infty} f_k(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}).$$

Теорема 4. *Функция f, интегрируемая по Риману на множестве E, измерима по Лебегу на E.*

Доказательство. Условие теоремы автоматически влечет измеримость E по Жордану, поэтому и измеримость по Лебегу. Пусть E'' — множество точек непрерывности f. По теореме Лебега (см. §§ 12.8 и 12.10) $\mu E'' = \mu E$. Зададим $\varepsilon > 0$ и определим для любого натурального k замкнутые множества $F_k \subset E''$ так, что $\mu F_k > \mu E - \varepsilon \cdot 2^{-k}$ $(F_k \subset F_{k+1})$. Функция f непрерывна на множестве F_k, следовательно, измерима на нем. Определим функции

$$f_k = \begin{cases} f, & \mathbf{x} \in F_k, \\ 0, & \mathbf{x} \in E - F_k, \end{cases}$$

которые очевидно измеримы на E. Имеем

$$\lim_{k\to\infty} f_k(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \text{ на } E' = \bigcup_k F_k, \ \mu E' = \mu E''.$$

Следовательно, f измерима на E', и так как $E' \subset E'' \subset E$, $\mu(E - E') = 0$, то f измерима и на E.

Теорема 5. *Если функция f измерима и положительна на множестве E положительной меры, то найдутся положительное число λ и множество $e \subset E$ положительной меры, на котором $f(\mathbf{x}) \geqslant \lambda$.*

Доказательство. В самом деле, зададим множества

$$e_0 = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in E, 1 \leqslant f\}, \ e_k = \left\{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in E, \frac{1}{k+1} \leqslant f < \frac{1}{k}\right\}, k = 1, 2, \ldots,$$

очевидно попарно не пересекающиеся и такие, что

$$E = \sum_0^{\infty} e_k, \ \mu E = \sum_0^{\infty} \mu e_k.$$

Так как $\mu E>0$, то найдется k, для которого $\mu e_k>0$. Для этого k можно положить $e=e_k$, $\lambda=1/(k+1)$, чтобы удовлетворить теореме.

§ 19.3. Интеграл Лебега

Последовательность действительных чисел с двумя входами

$$\ldots<p_{-2}<p_{-1}<p_0<p_1<p_2<\ldots,\quad p_k\to\infty,\quad p_{-k}\to-\infty,\quad k\to+\infty, \tag{1}$$

удовлетворяющую условию

$$\sup_k (p_{k+1}-p_k)=\delta_R<\infty, \tag{2}$$

будем называть *разбиением* R (действительной оси).

Пусть на (измеримом) множестве E (пространства R_n) задана измеримая конечная функция f. Введем множества (измеримые)

$$e_k=\{\mathbf{x}:\ \mathbf{x}\in E,\ p_k\leqslant f(\mathbf{x})<p_{k+1}\}=\{p_k\leqslant f(\mathbf{x})<p_{k+1}\},$$
$$k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$$

и два ряда (с двумя входами)

$$\underline{S}_R(f)=\sum_{-\infty}^{\infty}p_k\mu e_k=\sum_k p_k\mu e_k,\quad \overline{S}_R(f)=\sum_{-\infty}^{\infty}p_{k+1}\mu e_k=\sum_k p_{k+1}\mu e_k, \tag{3}$$

называемые соответственно *нижней и верхней* (*лебеговыми*) *интегральными суммами* f (соответствующими разбиению R).

Условимся считать, что $\underline{S}_R(f)$ и $\overline{S}_R(f)$ суть обозначения указанных рядов, а если эти ряды сходятся*), то пусть $\underline{S}_R(f)$ и $\overline{S}_R(f)$ обозначают также суммы этих рядов (числа).

Если f — ограниченная функция на E, то для достаточно больших N все множества e_k с $|k|>N$ — пустые и ряды (3) представляют собой конечные суммы. Другое дело, если f не ограничена на E, тогда ряды (3) могут сходиться и расходиться.

Лебег доказал, что *если для какого-либо разбиения R один из двух рядов* (3) *сходится, то сходится и другой; мало того, эти ряды тогда уже автоматически сходятся для любого другого разбиения R и существуют конечные пределы*

$$\lim_{\delta_R\to0}\underline{S}_R(f)=\lim_{\delta_R\to0}\overline{S}_R(f)=\int_E f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}, \tag{4}$$

---

*) Ряд $\sum\limits_{-\infty}^{\infty}u_k$ по определению сходится (абсолютно сходится), если сходятся (абсолютно сходятся) отдельно ряды $\sum\limits_{-\infty}^{-1}u_k$ и $\sum\limits_{0}^{\infty}u_k$. Сумма их сумм называется суммой ряда $\sum\limits_{-\infty}^{\infty}u_k$. В силу свойства (1) и того обстоятельства, что $\mu e_k\geqslant0$, ряды (3), если сходятся, то абсолютно.