Так как $\mu E > 0$, то найдется k, для которого $\mu e_k > 0$. Для этого k можно положить $e = e_k$, $\lambda = 1/(k+1)$, чтобы удовлетворить теореме.

§ 19.3. Интеграл Лебега

Последовательность действительных чисел с двумя входами

$$\ldots < p_{-2} < p_{-1} < p_0 < p_1 < p_2 < \ldots, \quad p_k \to \infty, \quad p_{-k} \to -\infty, \quad k \to +\infty, \tag{1}$$

удовлетворяющую условию

$$\sup_k (p_{k+1} - p_k) = \delta_R < \infty, \tag{2}$$

будем называть *разбиением* R (действительной оси).

Пусть на (измеримом) множестве E (пространства R_n) задана измеримая конечная функция f. Введем множества (измеримые)

$$e_k = \{\mathbf{x}\colon\ \mathbf{x} \in E,\ p_k \leqslant f(\mathbf{x}) < p_{k+1}\} = \{p_k \leqslant f(\mathbf{x}) < p_{k+1}\},$$
$$k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

и два ряда (с двумя входами)

$$\underline{S}_R(f) = \sum_{-\infty}^{\infty} p_k \mu e_k = \sum_k p_k \mu e_k, \quad \overline{S}_R(f) = \sum_{-\infty}^{\infty} p_{k+1} \mu e_k = \sum_k p_{k+1} \mu e_k, \tag{3}$$

называемые соответственно *нижней и верхней* (*лебеговыми*) *интегральными суммами* f (соответствующими разбиению R).

Условимся считать, что $\underline{S}_R(f)$ и $\overline{S}_R(f)$ суть обозначения указанных рядов, а если эти ряды сходятся*), то пусть $\underline{S}_R(f)$ и $\overline{S}_R(f)$ обозначают также суммы этих рядов (числа).

Если f — ограниченная функция на E, то для достаточно больших N все множества e_k с $|k| > N$ — пустые и ряды (3) представляют собой конечные суммы. Другое дело, если f не ограничена на E, тогда ряды (3) могут сходиться и расходиться.

Лебег доказал, что *если для какого-либо разбиения R один из двух рядов* (3) *сходится, то сходится и другой; мало того, эти ряды тогда уже автоматически сходятся для любого другого разбиения R и существуют конечные пределы*

$$\lim_{\delta_R \to 0} \underline{S}_R(f) = \lim_{\delta_R \to 0} \overline{S}_R(f) = \int_E f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \tag{4}$$

---

*) Ряд $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} u_k$ по определению сходится (абсолютно сходится), если сходятся (абсолютно сходятся) отдельно ряды $\sum\limits_{-\infty}^{-1} u_k$ и $\sum\limits_{0}^{\infty} u_k$. Сумма их сумм называется суммой ряда $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} u_k$. В силу свойства (1) и того обстоятельства, что $\mu e_k \geqslant 0$, ряды (3), если сходятся, то абсолютно.

равные одному и тому же числу, которое мы называем интегралом Лебега от функции f на множестве E.

Таким образом, в частности, *существует интеграл Лебега от любой измеримой ограниченной на E функции.*

Первый член цепи (4), так же как второй, есть определение*) интеграла Лебега от f на E, третий же есть обозначение интеграла Лебега. Оно не отличается от обозначения интеграла Римана. Путаницы здесь не происходит, потому что, если функция f интегрируема на E в римановом смысле или даже абсолютно интегрируема в несобственном римановом смысле, то она интегрируема и в смысле Лебега, причем оба интеграла равны между собой. Впрочем, если несобственный интеграл Римана от f на E хотя и сходится, но не абсолютно, то f не интегрируема на E по Лебегу, и в этом только случае могут потребоваться пояснения, чтобы избежать путаницы.

Эти утверждения будут обоснованы и будут даны еще два других эквивалентных определения интеграла Лебега, одно из которых мы сформулируем уже сейчас.

Будем называть функцию φ *ступенчатой* на измеримом множестве E (*с конечным или счетным числом ступенек*), если она определена равенствами

$$\varphi(\mathbf{x}) = c_j, \quad x \in \alpha_j, \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

где c_j — постоянные (действительные) числа и α_j — измеримые попарно не пересекающиеся множества, сумма которых равна E.

Ступенчатая функция φ называется *интегрируемой в лебеговом смысле*, если ряд

$$\sum_j c_j \mu\alpha_j = \int_E \varphi(x)\, dx \tag{6}$$

абсолютно сходится. Его сумма называется *интегралом Лебега* и обозначается, как указано в (6).

По второму определению функция f называется *интегрируемой по Лебегу на E*, если существует последовательность ступенчатых интегрируемых (в смысле (6)) на E функций $f_k(\mathbf{x})$, равномерно сходящаяся к $f(\mathbf{x})$ на E. Доказывается, что при этом автоматически существует предел

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_E f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \tag{7}$$

не зависящий от указанной последовательности $\{f_k\}$, называемый интегралом Лебега от f на E (слева в (7) интеграл $\int_E f_k dx$ понимается в смысле (6)).

*) В дальнейшем возникнут и другие определения, эквивалентные приведенному. При сравнении их между собой будем считать данное определение первым.

Эквивалентность первого и второго определений интеграла Лебега будет доказана ниже. Она заключается в том, что если функция f удовлетворяет одному из них, то она удовлетворяет и другому, и соответствующие пределы (4) и (7) равны между собой.

Интегрируемые *) по Лебегу функции называют еще *суммируемыми*. Более детальная терминология, которой придерживался сам Лебег, заключается в следующем.

Только ограниченные измеримые на E функции Лебег называл интегрируемыми на E. Для каждой из них существуют (числа) конечные суммы $\underline{S}_R(f)$, $\overline{S}_R(f)$, каково бы ни было разбиение R, и существует конечный предел (4) — интеграл Лебега от f на E. Таким образом, вычисление интеграла Лебега от ограниченной измеримой функции сводится к одному пределу (при $\delta_R \to 0$).

Что же касается неограниченных функций, для которых существуют пределы (4), то именно их Лебег назвал *суммируемыми*, чтобы подчеркнуть, что для их определения требуется *двойной переход к пределу*, во-первых, при вычислении сумм бесконечных рядов $\underline{S}_R(f)$, $\overline{S}_R(f)$, а во-вторых, при нахождении пределов (4).

В связи с этим можно сказать, что интеграл Лебега от неограниченной функции есть *несобственный интеграл*, при этом естественно считать, что это *абсолютно сходящийся* несобственный интеграл.

Прежде чем перейти к обоснованию высказанных утверждений, остановимся на некоторых свойствах ступенчатых функций.

Произвольная ступенчатая на E функция

$$\varphi(\mathbf{x})=c_i,\quad \mathbf{x}\in\alpha_i,\quad \sum\alpha_i=E,\quad \alpha_i\alpha_j=0\ (i\neq j) \tag{8}$$

измерима на E, потому что для любого действительного числа A множество

$$\{\varphi<A\}=\sum_{c_i<A}\alpha_i$$

измеримо как конечная или счетная сумма измеримых множеств.

Определение интегрируемой (в смысле (6)) ступенчатой функции φ и величина ее интеграла не зависит от способа ее задания. Если, например, функция φ задана еще при помощи равенств $\varphi(\mathbf{x})=c'_j$, $\mathbf{x}\in\alpha'_j$, $\sum\limits_j\alpha'_j=E$, $\alpha'_i\alpha'_j=0$ $(i\neq j)$, то тем самым автоматически выполняются условия

$$c_i\mu\left(\alpha_i\alpha'_j\right)=c'_j\mu\left(\alpha_i\alpha'_j\right), \tag{9}$$

*) Впрочем, понятие интегрируемости (суммируемости) будет далее распространено на функции, конечные почти всюду на E. Пока мы рассматриваем функции, конечные всюду на E.

потому что либо $\mu(\alpha_i\alpha_j')=0$, либо, если для данной пары (i, j) это не так, то найдется $\mathbf{x}\in\alpha_i\alpha_j'$, и тогда для него $\varphi(\mathbf{x})=c_i=c_j'$. Поэтому, если ряд $\sum_j c_i\mu\alpha_i$ абсолютно сходится то, сходятся также абсолютно следующие ряды, имеющие ту же сумму (пояснения ниже):

$$\sum_i c_i\mu\alpha_i=\sum_i\sum_j c_i\mu(\alpha_i\alpha_j')=\sum_j\sum_i c_j'\mu(\alpha_i\alpha_j')=\sum_j c_j'\mu\alpha_j'$$

(см. § 11.9). Абсолютная сходимость кратного ряда во втором члене цепи и первое равенство следуют из абсолютной сходимости ряда в первом члене и того факта, что $|c_i\mu\alpha_i|=\sum_j|c_i\mu(\alpha_i\alpha_j')|$. Второе равенство цепи верно, потому что в кратном абсолютно сходящемся ряду индексы i и j законно переставить местами, и имеет место (9). Третье же равенство цепи объясняется так же, как первое.

Если, кроме функции φ, определенной равенствами (8), задана еще другая ступенчатая функция

$$\psi(\mathbf{x})=d_j,\quad \mathbf{x}\in\beta_j,\quad \sum_j\beta_j=E,\quad \beta_j\beta_s=0\ (j\neq s),$$

то часто удобно унифицировать их задания, считая, что

$$\varphi(\mathbf{x})=c_i,\quad \mathbf{x}\in\alpha_i\beta_j,\quad \psi(\mathbf{x})=d_j,\quad \mathbf{x}\in\alpha_i\beta_j.$$

Тогда измеримые множества $\alpha_i\beta_j$ попарно не пересекаются, и их сумма равна E (конечно, пустое множество не пересекается с любым множеством).

Очевидно также, что если φ и ψ интегрируемы и A и B — действительные числа, то интегрируема также ступенчатая функция

$$A\varphi(\mathbf{x})+B\psi(\mathbf{x})=Ac_i+Bd_j,\quad \mathbf{x}\in(\alpha_i,\beta_j),$$

и выполняются равенства

$$\int_E(A\varphi+B\psi)\,d\mathbf{x}=\sum_i\sum_j(Ac_i+Bd_j)\,\mu(\alpha_i\beta_j)=$$
$$=A\sum_i c_i\sum_j\mu(\alpha_i\beta_j)+B\sum_j d_j\sum_i\mu(\alpha_i\beta_j)=$$
$$=A\sum_i c_i\mu\alpha_i+B\sum_j d_j\mu\beta_j=A\int_E\varphi\,dx+B\int_E\psi\,dx. \qquad (10)$$

Далее, если φ и ψ — ступенчатые функции, удовлетворяющие неравенству $\varphi(\mathbf{x})\leqslant\psi(\mathbf{x})$, то $c_i\mu(\alpha_i\beta_j)\leqslant d_j\mu(\alpha_i\beta_j)$, и потому, если φ и ψ интегрируемы, то

$$\int_E\varphi\,d\mathbf{x}\leqslant\int_E\psi\,d\mathbf{x}\qquad(\varphi(\mathbf{x})\leqslant\psi(\mathbf{x})), \qquad (11)$$

а если $\varphi(x) \geqslant 0$ и ψ интегрируема, то автоматически интегрируема φ.

Заметим, что для интегрируемой ступенчатой функции φ выполняется неравенство (см. (6))

$$\left|\int\limits_E \varphi\, d\mathrm{x}\right| = \left|\sum_k c_k \mu e_k\right| \leqslant \sum_k |c_k| \mu e_k = \int\limits_E |\varphi|\, d\mathrm{x}.$$

Важно отметить также, что если ступенчатая функция φ ограничена ($|c_i| \leqslant M$), то она интегрируема, и для ее интеграла выполняется неравенство

$$\left|\int\limits_E \varphi\, d\mathrm{x}\right| \leqslant \int\limits_E |\varphi|\, d\mathrm{x} \leqslant \sum_k |c_k| \mu e_k \leqslant M \mu E. \tag{12}$$

Обратим внимание на следующий важный для дальнейшего факт. Пусть на E задана измеримая функция f и для некоторого разбиения R действительной оси введены множества

$$e_k = \{p_k \leqslant f(\mathrm{x}) < p_{k+1}\},\quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

С помощью их построим две ступенчатые функции, называемые *нижней* и *верхней* для f, *соответствующей разбиению* R:

$$\underline{f}_R(\mathrm{x}) = p_k,\quad \mathrm{x} \in e_k,\quad \bar{f}_R(\mathrm{x}) = p_{k+1},\quad \mathrm{x} \in e_k.$$

Очевидно, что $\underline{f}_R(\mathrm{x}) \leqslant f(\mathrm{x}) < \bar{f}_R(\mathrm{x})$ и (см. (2))

$$|\bar{f}_R(\mathrm{x}) - \underline{f}_R(\mathrm{x})| \leqslant \delta_R$$

для всех $\mathrm{x} \in E$, поэтому также

$$|f(\mathrm{x}) - \underline{f}_R(\mathrm{x})| \leqslant \delta_R,\quad |f(\mathrm{x}) - \bar{f}_R(\mathrm{x})| < \delta_R.$$

Отсюда следует, что *как нижняя, так и верхняя функции (соответствующие разбиению R) стремятся к $f(\mathrm{x})$ равномерно на E при $\delta_R \to 0$*:

$$\lim_{\delta_R \to 0} \underline{f}_R(\mathrm{x}) = \lim_{\delta_R \to 0} \bar{f}_R(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x}),$$

какова бы ни была функция f, измеримая на E.

Заметим, что функции $\underline{f}_R(x)$ и $\bar{f}_R(x)$ интегрируемы (в смысле (6)) если соответствующие им ряды, т. е. нижняя и верхняя интегральные суммы

$$\underline{S}_R(f) = \sum_k p_k \mu e_k = \int\limits_E \underline{f}_R(\mathrm{x})\, dx,$$

$$\bar{S}_R(f) = \sum_k p_{k+1} \mu e_k = \int\limits_E \bar{f}_R(\mathrm{x})\, d\mathrm{x}$$

абсолютно сходятся.

В связи с этим сформулированное выше предложение Лебега, которое доказывается ниже в теореме 1, можно переформулировать еще следующим образом: *если для какого-либо разбиения R одна из ступенчатых функций $\underline{f}_R(\mathbf{x})$ или $\bar{f}_R(\mathbf{x})$ интегрируема на E (в смысле* (6)), *то интегрируема и другая, мало того, тогда все такие функции для любого R интегрируемы на E и существуют пределы*

$$\lim_{\delta_R\to 0}\int_E \underline{f}_R(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \lim_{\delta_R\to 0}\int_E \bar{f}_R(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_E f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x},$$

равные одному и тому же числу, называемому интегралом Лебега от f на E.

Теорема 1. *Пусть f измерима на E и для некоторого разбиения R действительной оси сходится одна из сумм* (3), *нижняя или верхняя.*

Тогда сходится к тому же пределу и другая сумма, так же как сходятся подобные суммы для любого другого разбиения R'. Кроме того, существуют равные пределы (4).

Доказательство. Введем нижнюю и верхнюю ступенчатые функции для разбиения R

$$\underline{f}_R(\mathbf{x}) = p_k,\quad \mathbf{x}\in e_k = \{p_k \leqslant f(\mathbf{x}) < p_{k+1}\},$$
$$\bar{f}_R(\mathbf{x}) = p_{k+1},\quad \mathbf{x}\in e_k,$$

где p_k — точки R, и еще нижнюю ступенчатую функцию $\underline{f}_{R'}(\mathbf{x})$, соответствующую какому-либо другому разбиению R'.

Допустим для определенности, что именно ряд $\underline{S}_R(f)$ сходится. Так как он автоматически сходится абсолютно, то существует интеграл на E от $\underline{f}_R(\mathbf{x})$ (в смысле (6)), равный

$$\underline{S}_R(f) = \sum_k p_k\mu e_k = \int_E \underline{f}_R(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}.$$

Но в силу неравенств

$$|\bar{f}_R(\mathbf{x}) - \underline{f}_R(\mathbf{x})| \leqslant \delta_R,$$
$$|\underline{f}_{R'}(\mathbf{x}) - \underline{f}_R(\mathbf{x})| \leqslant |\underline{f}_{R'}(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| + |f(\mathbf{x}) - \underline{f}_R(\mathbf{x})| < \delta_{R'} + \delta_R,$$

ступенчатые функции $\bar{f}_R(\mathbf{x}) - \underline{f}_R(\mathbf{x})$ и $\underline{f}_{R'}(\mathbf{x}) - \underline{f}_R(\mathbf{x})$ ограничены и потому интегрируемы. Но тогда интегрируема функция (как сумма двух ступенчатых интегрируемых функций)

$$\bar{f}_R(\mathbf{x}) = \underline{f}_R(\mathbf{x}) + [\bar{f}_R(\mathbf{x}) - \underline{f}_R(\mathbf{x})],$$

так же как функция

$$\underline{f}_{R'}(\mathbf{x}) = \underline{f}_R(\mathbf{x}) + [\underline{f}_{R'}(\mathbf{x}) - \underline{f}_R(\mathbf{x})],$$

т. е. имеют смысл числа $\overline{S}_R(f)$ и $\underline{S}_{R'}(\mathbf{x})$. Этим первая часть теоремы доказана.

Далее, выполняется условие Коши (см. (12))

$$|\underline{S}_R(f) - \underline{S}_{R'}(f)| \leqslant \int_E |\underline{f}_R(x) - \underline{f}_{R'}(x)|\, dx \leqslant$$
$$\leqslant (\delta_R + \delta_{R'})\, \mu E \to 0 \qquad (\delta_R,\ \delta_{R'} \to 0),$$

и мы убедились в существовании первого предела (4).

Наконец,

$$|\overline{S}_R(f) - S_R(f)| = \int_E |\overline{S}_R(\mathbf{x}) - S_R(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} \leqslant \delta_R \mu E \to 0 \qquad (\delta_R \to 0),$$

поэтому существует также равный первому второй предел (4), и теорема доказана.

Выше было приведено второе определение понятия интеграла Лебега, основанное на приближении интегрируемой функции произвольными ступенчатыми интегрируемыми функциями, не обязательно нижними или верхними. Оно вытекает из следующей теоремы:

Теорема 2. *Функция f интегрируема по Лебегу на E тогда и только тогда, когда возможно определить равномерно сходящуюся к ней на E последовательность интегрируемых ступенчатых функций $\lambda_k(\mathbf{x})$ $(k = 1, 2, \ldots)$. При этом автоматически окажется, что*

$$\lim_{k\to\infty} \int_E \lambda_k(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_E f\, d\mathbf{x}.$$

Таким образом, этот предел не зависит от индивидуальной последовательности $\{\lambda_k\}$.

Доказательство. В самом деле, пусть функция f интегрируема по Лебегу на E и $\underline{f}_{R_m}(\mathbf{x})$ — нижняя ее ступенчатая функция, соответствующая разбиению R_m с $\delta_{R_m} < 1/m$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Тогда

$$|\underline{f}_{R_m}(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| < \frac{1}{m} \to 0, \quad m \to \infty,$$

т. е. последовательность $\underline{f}_{R_m}(\mathbf{x})$ равномерно на E сходится к $f(\mathbf{x})$ и, кроме того, как мы знаем из теоремы 1,

$$\int_E \underline{f}_{R_m}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \underline{S}_{R_m}(f) \to \int_E f\, d\mathbf{x} \qquad (m \to \infty).$$

Этим доказано для любой интегрируемой по Лебегу функции f, что если положить $\lambda_m(\mathbf{x}) = \underline{f}_{R_m}(\mathbf{x})$, то будут удовлетворяться требования, указанные в теореме.

Наоборот, если последовательность ступенчатых интегрируемых на E (в смысле (6)) функций $\lambda_m(\mathbf{x})$ равномерно на E сходится к некоторой функции $f(\mathbf{x})$, т. е.

$$|\lambda_m(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| < \varepsilon_m \to 0, \quad m \to \infty$$

(ε_m не зависят от $\mathbf{x} \in E$), то f измерима и конечна на E (см. § 19.2, теорема 2) и ее определенная, как выше, нижняя ступенчатая функция $\underline{f}_{R_m}(\mathbf{x})$ тоже равномерно сходится к f:

$$|f(\mathbf{x}) - \underline{f}_{R_m}(\mathbf{x})| < \frac{1}{m} \to 0, \quad m \to \infty.$$

Отсюда

$$|\lambda_m(\mathbf{x}) - \underline{f}_{R_m}(\mathbf{x})| < |\lambda_m(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| + |f(\mathbf{x}) - \underline{f}_{R_m}(\mathbf{x})| \leqslant \\ \leqslant \varepsilon_m + \frac{1}{m} \to 0, \quad m \to \infty. \qquad (13)$$

При любом m функция $\underline{f}_{R_m}(\mathbf{x})$ интегрируема (в смысле (6)), потому что она представляется как сумма

$$\underline{f}_{R_m}(\mathbf{x}) = \lambda_m(\mathbf{x}) + (\underline{f}_{R_m}(\mathbf{x}) - \lambda_m(\mathbf{x}))$$

двух ступенчатых интегрируемых функций. Ведь λ_m интегрируема по условию, а $\underline{f}_{R_m} - \lambda_m$ ограничена. Но интегрируемость $\underline{f}_{R_m}$ (в смысле (6)) выражает существование нижней интегральной суммы f для разбиения R_m, и в силу теоремы 1 можно заключить, что наша функция интегрируема по Лебегу на E и что

$$\int_E \underline{f}_{R_m}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \underline{S}_{R_m}(f) \to \int_E f\, d\mathbf{x},$$

где слева стоит интеграл от ступенчатой функции $\underline{f}_{R_m}(\mathbf{x})$ в смысле (6), а справа — интеграл в смысле первого определения (4).

Наконец, учитывая еще, что (см. (13))

$$\left|\int_E [\lambda_m(\mathbf{x}) - \underline{f}_{R_m}(\mathbf{x})]\, d\mathbf{x}\right| < \left(\varepsilon_m + \frac{1}{m}\right)\mu E,$$

получим (см. (10))

$$\int_E \lambda_m\, d\mathbf{x} = \int_E \underline{f}_{R_m}\, d\mathbf{x} + \int_E (\lambda_m - \underline{f}_{R_m})\, d\mathbf{x} \to \int_E f\, d\mathbf{x}.$$

Интеграл в смысле (6) для ступенчатой интегрируемой функции $\varphi(\mathbf{x})$ совпадает с интегралом в смысле первого определения, потому что можно считать в теореме 2, что φ приближается функциями $\lambda_m = \varphi$ ($m = 1, 2, \ldots$).

Перейдем к основным свойствам интеграла Лебега.

1. *Если функция f интегрируема по Лебегу на E, то она будет обладать этим свойством, если ее видоизменить любым обра-*

ном на множестве лебеговой меры нуль или, как говорят, если заменить ее равной ей почти всюду функцией f_1. *При этом*

$$\int_E f\,d\mathbf{x} = \int_E f_1\,d\mathbf{x}.$$

f_1 *называют функцией, эквивалентной* f.

Это свойство очевидно, потому что $\underline{S}_R(f) = \underline{S}_R(f_1)$ для любого разбиения R.

Когда мы говорили, что функция f интегрируема (по Лебегу) на E, то мы считали, что она конечна на E, т. е. приводит в соответствие каждой точке $x \in E$ число (конечное число). Но при оперировании с интегралом Лебега полезно ввести понятие *интегрируемости по Лебегу функции* f, *заданной (конечной) почти всюду на* E, то есть всюду на E, за исключением множества лебеговой меры нуль. В остальных же точках $\mathbf{x} \in E$ она не определена, в частности, это могут оказаться точки, где естественно считать $f(\mathbf{x}) = \infty$.

По определению *функция, заданная (конечная) почти всюду на множестве* E, *называется интегрируемой по Лебегу на* E, если она интегрируема по Лебегу на множестве E', где она конечна. При этом полагают

$$\int_E f\,d\mathbf{x} = \int_{E'} f\,d\mathbf{x}.$$

Таким образом, E' — измеримое множество, а вместе с ним и E (ведь $\mu(E - E') = 0$).

Совокупность всех почти всюду конечных интегрируемых по Лебегу на E функций принято обозначать через $L(E)$. В частности, она содержит в себе как часть совокупность конечных на E интегрируемых по Лебегу функций, которая в свою очередь содержит в себе как часть множество ограниченных измеримых на E функций.

Например, если E есть (одномерный) отрезок $[0, 1]$, то можно сказать, что функция $1/\sqrt{x}$ конечна почти всюду на $[0, 1]$, потому что она конечна на полуинтервале $(0, 1]$, отличающемся от $[0, 1]$ на множество меры нуль, состоящее из одной нулевой точки. Мы увидим в дальнейшем (см. свойство 15)), что интеграл от этой функции в смысле Лебега существует и совпадает с несобственным интегралом Римана от нее:

$$\int_{[0,1]} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_{(0,1]} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2.$$

Таким образом, рассматриваемая функция принадлежит $L([0, 1])$ так же, как $L((0, 1])$.

Целесообразность введения понятия почти всюду конечной измеримой функции возникает также в следующей ситуации. Последовательность измеримых конечных на E функций $f_k(\mathbf{x})$ может оказаться сходящейся к некоторой конечной функции только почти всюду на E. В остальных же точках E, составляющих множество лебеговой меры нуль, либо существует (несобственный) предел, равный ∞, либо никакой предел, конечный или бесконечный, не существует.

Если F и Φ — почти всюду конечные измеримые на E функции, а A и B — числа, то функция $AF+B\Phi$ определяется следующим образом. Пусть E', E'' — соответственно множества, где F и Φ конечны, они будут конечны и на (измеримом) пересечении $E_* = E'E''$. Определяем функцию $AF+B\Phi$ на E_* обычным образом, этим она будет определена почти всюду на E. Ведь $\mu(E-E_*)=0$.

2. *Если F, $\Phi \in L(E)$ и $F(\mathbf{x}) \leqslant \Phi(\mathbf{x})$ почти всюду на E, то*

$$\int_E F\,d\mathbf{x} \leqslant \int_E \Phi\,d\mathbf{x}. \tag{14}$$

Доказательство. Пусть пока F и Φ конечны на E. Для любого разбиения R

$$\underline{F}_R(\mathbf{x}) \leqslant F(\mathbf{x}) \leqslant \Phi(\mathbf{x}) \leqslant \overline{\Phi}_R(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in E.$$

При этом из того, что F, $\Phi \in L(E)$, следует, что ступенчатые функции $\underline{F}_R$ и $\overline{\Phi}_R$ интегрируемы на E, и так как $\underline{F}_R(\mathbf{x}) \leqslant \overline{\Phi}_R(\mathbf{x})$, то (см. (11))

$$\int_E \underline{F}_R(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \leqslant \int_E \overline{\Phi}_R(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\delta_R \to 0$, получим (14).

В общем случае вводим наибольшее множество $E' \subset E$, где F и Φ конечны и выполняется неравенство $F \leqslant \Phi$. Для него доказываем неравенство (14) с E' вместо E, но так как $\mu E' = \mu E$, то (14) верно и для E, потому что мы решили формально в этих случаях считать, что

$$\int_E F\,d\mathbf{x} = \int_{E'} F\,d\mathbf{x}, \quad \int_E \Phi\,d\mathbf{x} = \int_{E'} \Phi\,d\mathbf{x}.$$

3. *Если F, $\Phi \in L(E)$ и A и B — действительные числа, то $AF+B\Phi \in L(E)$ и*

$$\int_E (AF+B\Phi)\,d\mathbf{x} = A\int_E F\,d\mathbf{x} + B\int_E \Phi\,d\mathbf{x}. \tag{15}$$

Доказательство. Пусть E' $(\mu E' = \mu E)$ — наибольшее множество, на котором F и Φ конечны. По теореме 2 существуют равномерно сходящиеся соответственно к F и Φ последовательности ступенчатых интегрируемых на E' функций F_k, $\Phi_k (k = 1, 2, \ldots)$. В силу (10) для них имеет место

$$\int\limits_{E'} (AF_k + B\Phi_k)\, d\mathbf{x} = A \int\limits_{E'} F_k\, d\mathbf{x} + B \int\limits_{E'} \Phi_k\, d\mathbf{x}, \tag{16}$$

и так как F_k, Φ_k, $AF_k + B\Phi_k$ — ступенчатые интегрируемые функции, сходящиеся равномерно соответственно к конечным функциям F, Φ, $AF + B\Phi$, то не только F и Φ, но и $AF + B\Phi \in L(E')$, и в равенстве (16) законно перейти к пределу при $k \to \infty$ под знаком интеграла. Наконец, так как $\mu E = \mu E'$, то имеет место (15).

В частности, из (15) при $A = 1$, $B = \pm 1$ следует, что

$$\int\limits_E (F \pm \Phi)\, d\mathbf{x} = \int\limits_E F d\mathbf{x} \pm \int\limits_E \Phi\, d\mathbf{x}$$

(существование интегралов в правой части равенства влечет существование интеграла слева).

По индукции доказывается, что

$$\int\limits_E \sum_1^l f_k\, d\mathbf{x} = \sum_1^l \int\limits_E f_k\, d\mathbf{x} \quad (l = 1, 2, \ldots).$$

4. *Если $E_1 \subset E$, E_1 измеримо и функция $f \in L(E)$, то $f \in L(E_1)$, т. е. f есть почти всюду на E_1 конечная интегрируемая по Лебегу функция.*

Доказательство. Пусть E' — наибольшее множество, на котором f конечна и $E_1' = E'E_1$. Тогда для любого разбиения R (см. (1))

$$e_k' = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in E_1', \quad p_k \leqslant f(\mathbf{x}) < p_{k+1}\} \subset$$
$$\subset \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in E', \quad p_k \leqslant f(\mathbf{x}) < p_{k+1}\} = e_k.$$

Поэтому в силу того, что конечная на E' функция $f \in L(E')$,

$$\sum_k |p_k|\, \mu e_k' \leqslant \sum_k |p_k|\, \mu e_k < \infty.$$

Но тогда по теореме 1 $f \in L(E_1')$. Следовательно, $f \in L(E_1)$, ведь $\mu E_1 = \mu E_1'$.

5. *Если $f \in L(E_1)$, $f \in L(E_2)$ и $\mu(E_1E_2) = 0$, то $f \in L(E_1 + E_2)$ и*

$$\int\limits_{E_1+E_2} f\, d\mathbf{x} = \int\limits_{E_1} f\, d\mathbf{x} + \int\limits_{E_2} f\, d\mathbf{x}. \tag{17}$$

Доказательство. Пусть пока f конечна на $E_1 + E_2$. Для произвольного разбиения R определим множества

$$e_k' = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in E_1, \quad p_k \leqslant f(\mathbf{x}) < p_{k+1}\},$$
$$e_k'' = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in E_2, \quad p_k \leqslant f(\mathbf{x}) < p_{k+1}\},$$
$$e_k = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in E_1 + E_2, \ p_k \leqslant f(\mathbf{x}) < p_{k+1}\}.$$

Если учесть, что $\mu(E_1E_2)=0$, то очевидно $\mu e_k = \mu e_k' + \mu e_k''$. Отсюда для нижних интегральных сумм f относительно множеств E_1+E_2, E_1, E_2 выполняется равенство

$$\sum_k p_k \mu e_k = \sum_k p_k \mu e_k' + \sum_k p_k \mu e_k''.$$

В силу условий теоремы ряды справа сходятся, а с ними сходится и ряд слева, отсюда $f \in L(E_1+E_2)$. После перехода к пределу при $\delta_R \to 0$ из этого равенства следует (17).

В общем случае вводим множества $E_1' \subset E_1$, $E_2' \subset E_2$; $\mu E_1' = \mu E_1$, $\mu E_2' = \mu E_2$, на которых f конечна. Для них верно равенство (17), но тогда оно верно и для E_1, E_2.

По индукции доказывается, что $(\mu(E_kE_l)=0,\ k \neq l)$

$$\int\limits_{\bigcup\limits_1^N E_k} f\,d\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{E_k} f\,d\mathbf{x}.$$

6. *Если ограниченная функция f интегрируема по Риману на множестве E, то она интегрируема и по Лебегу и интегралы от f по E в обоих смыслах равны.*

Действительно, ограниченная интегрируемая на E по Риману функция измерима (см. теорему 4, § 19.2), поэтому интегрируема по Лебегу. Если теперь E представить в виде суммы $E = \bigcup\limits_k E_k$ конечного числа измеримых по Жордану (следовательно, и по Лебегу) множеств, пересекающихся попарно разве что по своим границам (жордановой, следовательно, и лебеговой меры нуль), то для лебегова интеграла от f по E получим (см. свойство 2)

$$\sum_k m_k |E_k| \leqslant \int\limits_E f\,dx = \sum_k \int\limits_{E_k} f\,dx \leqslant \sum_k M_k |E_k|,$$

и так как левая и правая части этой цепи стремятся при $\max\limits_k d(E_k) \to 0$ к риманову интегралу от f по E, то последний равен соответствующему лебегову. Здесь m_k, M_k — соответственно нижняя и верхняя грани f на E_k.

7. *Пусть f — измеримая на E неотрицательная функция не обязательно конечная* ($f(\mathbf{x}) \leqslant +\infty$, $\mathbf{x} \in E$) *и*

$$(f)_N = \begin{cases} f(\mathbf{x}), & 0 \leqslant f(\mathbf{x}) \leqslant N, \\ N, & N < f(\mathbf{x}). \end{cases} \tag{18}$$

Тогда, если $f \in L(E)$, то

$$\lim_{N\to\infty} \int\limits_E (f)_N\,d\mathbf{x} = \int\limits_E f\,d\mathbf{x}. \tag{19}$$

Наоборот, если существует предел слева в (19), *то $f \in L(E)$.*

Доказательство. Пусть $f \in L(E)$, тогда множество $\{\mathbf{x}: f(\mathbf{x}) = +\infty\}$ имеет лебегову меру нуль, и $(f)_N$ измерима и ограничена на E, потому что при $A \leqslant N$ $\{(f)_N < A\} = \{f < A\}$ и при $A > N$ $\{(f)_N < A\} = E$. Таким образом, $(f)_N \in L(E)$ и, кроме того, $(f)_N(\mathbf{x}) \leqslant (f)_{N+1}(\mathbf{x}) \leqslant f(\mathbf{x})$. Поэтому для любого разбиения R (см. (1))

$$\sum_{p_{k+1} \leqslant N} p_k \mu e_k \leqslant \int_E (f)_N \, d\mathbf{x} \leqslant \int_E f \, d\mathbf{x} \tag{20}$$

и после перехода к пределу при $N \to \infty$ получим

$$\underline{S}_R(f) \leqslant \lim_{N \to \infty} \int_E (f_N) \, dx \leqslant \int_E f \, d\mathbf{x}. \tag{21}$$

Но первый член в этой цепи можно взять как угодно мало отличающимся от третьего, и потому верно равенство (19).

Если теперь предположить существование конечного предела слева в (19), то множество $e = \{\mathbf{x}: \mathbf{x} \in E, f(\mathbf{x}) = +\infty\}$ автоматически будет иметь меру нуль. Ведь имеет место неравенство

$$\int_E (f)_N \, d\mathbf{x} \geqslant \int_e (f)_N \, d\mathbf{x} = N \mu e,$$

левая часть которого имеет при $N \to \infty$ конечный предел, что возможно лишь если $\mu e = 0$. Но из первого неравенства в (21) тогда еще получим (считая $p_0 = 0$)

$$\underline{S}_R(f) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \mu e_k \leqslant \lim_{N \to \infty} \int (f)_N \, d\mathbf{x}.$$

Следовательно, функция f интегрируется на множестве E', где она конечна, т. е. $f \in L(E')$, или, что все равно, $f \in L(E)$.

Отметим, что интегрируемость f на E' уже предполагает автоматически измеримость E', таким образом, и E.

Из сказанного следует, что *интеграл Лебега от неотрицательной измеримой на E (не обязательно конечной) функции можно определить как предел* (19).

В некоторых изложениях теории интеграла Лебега начинают с этой теории для ограниченных измеримых функций, а затем вводят понятие *суммируемой* (неограниченной, но принадлежащей $L(E)$) *неотрицательной функции*, определяя ее как измеримую на E функцию f, для которой существует конечный предел (19). Этот предел и объявляется по определению интегралом Лебега от f на E.

Из свойства 7 следует, что совокупность всех таким образом определенных функций в точности совпадает с совокупностью неограниченных неотрицательных функций, принадлежащих $L(E)$.

Измеримая неограниченная конечная на E функция произвольного знака называется *суммируемой на E*, если ее можно представить в виде разности двух конечных неотрицательных суммируемых или ограниченных измеримых функций. Всякая такая разность, очевидно, принадлежит к $L(E)$. Ниже будет показано, что и, наоборот, всякая конечная на E функция $f \in L(E)$ может быть представлена в виде разности двух неотрицательных конечных функций, принадлежащих $L(E)$, т. е. в другой терминологии*), каждая из этих функций либо измерима и ограничена, либо суммируема на E.

Произвольная, заданная почти всюду на E функция f называется *суммируемой на* E, если она суммируема на множестве $E' \subset E$, где f конечна и $\mu E' = \mu E$.

Пусть функция f конечна и измерима на E. Определим для нее две неотрицательные, тоже очевидно измеримые конечные на E функции

$$f_+(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & (f(\mathbf{x}) > 0), \\ 0 & (f(\mathbf{x}) \leqslant 0), \end{cases} \qquad f_-(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & (f(\mathbf{x}) \geqslant 0), \\ -f(\mathbf{x}) & (f(\mathbf{x}) < 0). \end{cases} \tag{22}$$

Очевидно, что

$$f(\mathbf{x}) = f_+(\mathbf{x}) - f_-(\mathbf{x}), \quad |f(\mathbf{x})| = f_+(\mathbf{x}) + f_-(\mathbf{x}). \tag{23}$$

Если f_+, $f_- \in L(E)$, то и $f \in L(E)$ (см. свойство 3), и выполняется равенство

$$\int_E f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_E f_+(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} - \int_E f_-(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}. \tag{24}$$

Но верно и обратное утверждение: если $f \in L(E)$, то также f_+, $f_- \in L(E)$. В самом деле (пояснения ниже),

$$\int_E f_+(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_{f(\mathbf{x})>0} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} + \int_{f(\mathbf{x})\leqslant 0} 0\, d\mathbf{x} = \int_{f(\mathbf{x})>0} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Третий член в этой цепи имеет смысл, потому что множество $\{f > 0\} \subset E$ измеримо и из интегрируемости f на E следует интегрируемость f на этом множестве (см. свойство 4). Переход от третьего члена цепи ко второму тривиален, потому что множество $\{f \leqslant 0\}$ измеримо и интеграл от функции, тождественно равной нулю на нем, равен очевидно нулю. Наконец, переход от второго члена цепи к первому и утверждение, что $f_+ \in L(E)$, следуют из свойства 5. Аналогично доказывается, что $f_- \in L(E)$.

8. *Если F и Φ — измеримые функции на E* (могущие быть равными $+\infty$), $0 \leqslant F(\mathbf{x}) \leqslant \Phi(\mathbf{x})$ *и* $\Phi \in L(E)$, *то* $F \in L(E)$.

В самом деле, из условия следует, что $(F)_N \leqslant (\Phi)_N$ на E при любом N, и так как $(F)_N$, $(\Phi)_N$, $\Phi \in L(E)$, то (см. свойство 2)

$$\int_E (F_N)\, d\mathbf{x} \leqslant \int_E (\Phi)_N\, d\mathbf{x} \leqslant \int_E \Phi\, d\mathbf{x}.$$

---

*) Впрочем, при употреблении этой терминологии обычно соглашаются называть все функции $f \in L(E)$, как ограниченные, так и неограниченные, суммируемыми.

К тому же первый член этой цепи при неограниченном возрастании N не убывает и, таким образом, стремится к конечному пределу. Но тогда в силу свойства 7 $F \in L(E)$.

9. *Если* $f \in L(E)$, то $|f| \in L(E)$ *и*

$$\left|\int_E f\,d\mathbf{x}\right| \leqslant \int_E |f|\,d\mathbf{x}. \tag{25}$$

Обратное утверждение верно только в такой формулировке: *если функция, заданная почти всюду на E, измерима на E и $|f| \in L(E)$, то и $f \in L(E)$.*

Доказательство. Пусть $E' \subset E$, $\mu E' = \mu E$ — множество, на котором f конечна. На нем можно определить, как мы знаем, неотрицательные функции f_+, $f_- \in L(E')$, для которых

$$|f(\mathbf{x})| = f_+(\mathbf{x}) + f_-(\mathbf{x}), \quad f(\mathbf{x}) = f_+(\mathbf{x}) - f_-(\mathbf{x}).$$

Отсюда $|f| \in L(E')$, следовательно, также $|f| \in L(E)$. Кроме того, выполняются равенства

$$\int_{E'} |f|\,d\mathbf{x} = \int_{E'} f_+\,d\mathbf{x} + \int_{E'} f_-\,d\mathbf{x}, \quad \int_{E'} f\,d\mathbf{x} = \int_{E'} f_+\,d\mathbf{x} - \int_{E'} f_-\,d\mathbf{x},$$

из которых, если учесть, что интегралы от f_+ и f_- суть неотрицательные числа, непосредственно следует неравенство (25) с E' вместо E, но тогда это неравенство верно и для E.

Пусть определенная почти всюду на E функция f измерима на E и $|f| \in L(E)$. Тогда на E' (где f конечна) имеют смысл измеримые неотрицательные функции f_+ и f_- и выполняются неравенства $|f(\mathbf{x})| \geqslant f_+(x)$, $f_-(x)$, откуда следует в силу свойства 8, что f_+, $f_- \in L(E')$, и тогда $f = f_+ - f_- \in L(E')$.

Отметим, что существуют множества, не измеримые в лебеговом смысле, но мы слишком бы уклонились от цели, если бы остановились на этом вопросе. Пусть все же e есть неизмеримое множество, принадлежащее кубу Δ, и функция $\psi(\mathbf{x})$ равна 1 на e и -1 на $\Delta - e$. Она очевидно не измерима, и потому не может быть речи о принадлежности ее к $L(\Delta)$. Между тем, $|\psi(\mathbf{x})| = 1$ и $|\psi| \in L(\Delta)$.

10. *Если* $f \in L(E)$ и φ — *измеримая ограниченная функция на* $E(|\varphi(\mathbf{x})| \leqslant M)$, *то* $f\varphi \in L(E)$ *и*

$$\int_E |\varphi f|\,d\mathbf{x} \leqslant \int_E M\,|f|\,d\mathbf{x} = M \int_E |f|\,d\mathbf{x}. \tag{26}$$

Это следует из свойства 2 и (15) при $B = 0$.

11. *Если функция* $f \in L(E)$, *то для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что для любого множества* $e \subset E$ *меры* $\mu e < \delta$ *выполняется неравенство*

$$\int_e |f|\,d\mathbf{x} < \varepsilon. \tag{27}$$

Доказательство. Будем пока считать f неотрицательной на E. Зададим $\varepsilon > 0$ и подберем N так, чтобы

$$\int_E (f - (f)_N)\,d\mathbf{x} = \int_E f\,d\mathbf{x} - \int_E (f)_N\,d\mathbf{x} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Теперь, учитывая, что $f - (f)_N \geqslant 0$ на E, для множества $e \subset E$ с $\mu e < \varepsilon/2N$ получим

$$\int_e f\,d\mathbf{x} = \int_e (f)_N d\mathbf{x} + \int_e (f - (f)_N)\,d\mathbf{x} \leqslant$$
$$\leqslant \int_e (f)_N\,d\mathbf{x} + \int_E (f - (f)_N)\,d\mathbf{x} \leqslant N\mu e + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

В общем случае, когда $f \in L(E)$ любого знака и задана только почти всюду на E, вводим наибольшее множество $E' \subset E$, где f конечна, тогда конечная на E' функция $|f| \in L(E')$, и в силу доказанного для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ такое, что выполняется неравенство (27), каково бы ни было множество $e' \subset E'$, $\mu e' < \delta$, заменяющее пока e. Но тогда справедливо также утверждение теоремы, ведь если $e \subset E$ и $\mu e < \delta$, то $eE' \subset E'$ и $\mu(eE') = \mu e$.

Свойство 11 можно еще выразить так: если $f \in L(E)$, то какова бы ни была последовательность измеримых множеств e_k с $\mu e_k \to 0$, имеет место

$$\left|\int_{e_k} f\,dx\right| \leqslant \int_{e_k} |f|\,dx \to 0, \qquad k \to \infty. \tag{28}$$

12. *Если*

$$e = e_1 + e_2 + \ldots \subset E$$

— измеримые множества, $\mu(e_k e_l) = 0$, $k \neq l$ *и* $f \in L(E)$, *то*

$$\int_e f\,d\mathbf{x} = \int_{e_1} f\,d\mathbf{x} + \int_{e_2} f\,d\mathbf{x} + \ldots$$

В самом деле, существование интегралов, входящих в правую часть этого равенства, следует из свойства 4. Далее, в силу свойства 11

$$\int_e f\,d\mathbf{x} - \sum_1^N \int_{e_k} f\,d\mathbf{x} = \int\limits_{e - \sum_1^N e_k} f\,d\mathbf{x} \to 0, \quad N \to \infty,$$

потому что (§ 19.1, теорема 5)

$$\mu\left(e - \sum_1^N e_k\right) \to 0, \quad N \to \infty.$$

13. **Теорема Лебега.** *Если последовательность функций $f_k \in L(E)$ сходится почти всюду на E к функции f и почти всюду на E выполняется неравенство $|f_k(\mathbf{x})| \leqslant \Phi(\mathbf{x})$ $(k = 1, 2, \ldots)$, где $\Phi \in L(E)$, то $f \in L(E)$ и*

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_E f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}, \tag{29}$$

т. е. при указанных условиях можно переходить к пределу под знаком интеграла.

В частности, *равенство* (29) *верно для сходящейся к $f(x)$ ограниченной последовательности $f_k(\mathbf{x})$.*

Доказательство. Пусть $E' \subset E$ есть наибольшее множество, на котором функции Φ и f_k конечны, удовлетворяется неравенство $|f_k| \leqslant \Phi$ и, кроме того, $f_k(\mathbf{x}) \to f(\mathbf{x})$. Очевидно, $\mu E' = \mu E$, f измерима на E' и $|f(\mathbf{x})| \leqslant \Phi(\mathbf{x})$ на E', и так как $\Phi \in L(E)$, то $|f| \in L(E')$ и $f \in L(E)$. Положим $E' = E'_k + E''_k$, где

$$E'_k = \{\mathbf{x}\colon \mathbf{x} \in E', \ \ |f(\mathbf{x}) - f_k(\mathbf{x})| > \delta\},$$
$$E''_k = \{\mathbf{x}\colon \mathbf{x} \in E', \ \ |f(\mathbf{x}) - f_k(\mathbf{x})| \leqslant \delta\}.$$

Тогда $\mu E'_k \to 0$, $k \to \infty$ (см. теорему 3, § 19.2), и

$$\left|\int_E f\,d\mathbf{x} - \int_E f_k\,d\mathbf{x}\right| = \left|\int_{E'} (f - f_k)\,d\mathbf{x}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_{E'_k} |f|\,dx + \int_{E'_k} |f_k|\,dx + \int_{E''_k} |f - f_k|\,dx \leqslant$$
$$\leqslant 2\int_{E'_k} \Phi\,dx + \delta\mu E < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad (k > k_0),$$

где $\delta > 0$ взято так, чтобы $\delta\mu E < \varepsilon/2$, и затем (см. свойство 11), пользуясь тем, что $\mu E'_k \to 0$, подобрано достаточно большое k_0, чтобы $\displaystyle\int_{E'_k} \Phi\,dx < \frac{\varepsilon}{2}$ $(k > k_0)$.

14. *Пусть последовательность неотрицательных (принимающих значения конечные или $+\infty$) на E функций $f_k \in L(E)$ не убывает. Тогда для предельной функции*

$$\lim_{k\to\infty} f_k(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$$

имеет место равенство

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_E f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}, \tag{30}$$

где правая часть есть интеграл Лебега от f на E, если $f \in L(E)$, и есть $+\infty$, если $f \notin L(E)$.

Доказательство. Пусть $f \in L(E)$. Тогда функция f, а вместе с ней и f_k, конечны на множестве $E' \subset E$ меры $\mu E' = \mu E$, и на E' выполняется теорема Лебега (свойство 13), где $\Phi = f$. Поэтому имеет место (30), если заменить E на E', но тогда и для E. Таким образом, существует предел слева в (30), равный лебегову интегралу от f на E.

Обратно, пусть существует конечный предел

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k \, d\mathbf{x} = A < \infty.$$

Так как $(f_k)_N \leqslant f_k$ на E, то (см. свойство 2)

$$\int_E (f_k)_N \, d\mathbf{x} \leqslant \int_E f_k \, d\mathbf{x} \leqslant A,$$

т. е. $\int_E (f_k)_N \, d\mathbf{x} \leqslant A.$

Учитывая еще, что $(f_k)_N \to (f)_N$, $k \to \infty$ на E, после перехода к пределу под знаком интеграла (см. свойство 13) получим

$$\int_E (f)_N \, d\mathbf{x} \leqslant A,$$

каково бы ни было $N > 0$. Но тогда $f \in L(E)$ (см. свойство 7).

15. *Пусть функция f интегрируема несобственно в смысле Римана на E. Для того чтобы она была абсолютно интегрируемой на E (в римановом смысле), необходимо и достаточно, чтобы $f \in L(E)$, и тогда риманов несобственный интеграл от f на E равен лебегову интегралу от f на E.*

При доказательстве ограничимся случаем, когда риманов несобственный интеграл от f имеет единственную особенность в точке $\mathbf{x}^0 \in E$.

Если ввести для любого натурального N функцию

$$f_N(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}), & x \in E - V_N, \\ 0, & x \in EV_N, \end{cases}$$

где V_N — шар радиуса $1/N$ с центром в $\mathbf{x}^0$, то рассматриваемый интеграл можно записать как предел

$$\lim_{N\to\infty} \int_E f_N \, d\mathbf{x} = \lim_{N\to\infty} \int_{E-V_N} f \, d\mathbf{x} = \int_E f \, d\mathbf{x}.$$

Если f к тому же принадлежит $L(E)$, то этот интеграл можно рассматривать как лебегов, что вытекает из теоремы Лебега (см. свойство 13), потому что $f_N \to f$ и $|f_N| \leqslant |f| \in L(E)$. Кроме того, в силу свойства 11

$$\int_{EV_N} |f|\,d\mathbf{x} \to 0, \quad N \to \infty,$$

и потому

$$\int_{E(V_N - V_{N'})} |f|\,d\mathbf{x} \to 0, \quad N,\ N' \to \infty, \quad N < N',$$

что показывает, что риманов несобственный интеграл от f абсолютно сходится. Надо еще учесть, что интеграл $\int\limits_{E(V_N - V_{N'})} f\,dx$ можно рассматривать как в смысле Лебега, так и в смысле Римана.

Наоборот, из абсолютной сходимости риманова интеграла следует существование предела

$$\lim_{N\to\infty} \int_E |f_N|\,d\mathbf{x} = \lim_{N\to\infty} \int_{E - V_N} |f|\,d\mathbf{x},$$

но тогда, учитывая, что $|f_N| \leqslant |f_{N+1}|$, в силу свойства 14 $|f| \in L(E)$, следовательно, $f \in L(E)$, потому что f измерима по Лебегу на E.

16. *Если для почти всюду неотрицательной на E функции $f \in L(E)$ выполняется равенство*

$$\int_E f\,d\mathbf{x} = 0, \tag{31}$$

то $f(\mathbf{x}) = 0$ почти всюду на E.

В самом деле, допустим, что существует множество $e \subset E$ положительной меры, на котором $0 < f(\mathbf{x}) < \infty$. Функция измерима на нем, и в силу теоремы 5, § 19.2 существует множество $e' \subset e$ положительной меры, на котором $f(\mathbf{x}) \geqslant \lambda$, где λ — некоторое положительное число. Но тогда было бы

$$\int_E f\,d\mathbf{x} \geqslant \int_{e'} f\,d\mathbf{x} \geqslant \lambda \mu e' > 0,$$

что противоречит равенству (31).

17. *Пусть $f \in L(E)$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется ступенчатая функция*

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} c_j, & \mathbf{x} \in F_j \subset E \quad (j = 1, \ldots, N), \\ 0 & \text{для остальных } \mathbf{x} \in E \end{cases} \tag{32}$$

с конечным числом ступенек, где F_j — замкнутые попарно непересекающиеся множества, так что

$$\int_E |f(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x} < \varepsilon. \tag{33}$$

При этом, если $f(\mathbf{x}) \geqslant 0$, то и $\varphi(\mathbf{x}) \geqslant 0$.

Доказательство. Вводим множество $E' \subset E$, $\mu E' = \mu E$, где f конечна, и определяем нижнюю интегральную функцию

$$\varphi_1(\mathbf{x}) = p_k, \quad \mathbf{x} \in e_k = \{\mathbf{x}\colon \ \mathbf{x} \in E, \ p_k \leqslant f(\mathbf{x}) < p_{k+1}\}$$

с $p_0 = 0$ и $\delta_R < \varepsilon/3\mu E$ (случай $\mu E = 0$ тривиален). Тогда

$$\int\limits_E |f - \varphi_1|\, d\mathbf{x} = \int\limits_{E'} |f - \varphi_1|\, d\mathbf{x} < \delta_R \mu E < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Определяем далее функцию

$$\varphi_2(\mathbf{x}) = \begin{cases} p_k, & \mathbf{x} \in e_k, \ |k| \leqslant N, \\ 0 & \text{для остальных } \mathbf{x} \in E, \end{cases}$$

где N выбирается настолько большим, что

$$\int\limits_E |\varphi_1 - \varphi_2|\, dx = \sum_{|k| > N} |p_k|\, \mu e_k < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Наконец, определяем замкнутые множества $F_k \subset e_k$, а с ними функцию

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} p_k, & \mathbf{x} \in F_k, \quad |k| \leqslant N, \\ 0 & \text{для остальных } \mathbf{x}, \end{cases}$$

так, чтобы

$$\int\limits_E |\varphi_2 - \varphi|\, d\mathbf{x} = \sum_{|k| \leqslant N} |p_k|\, \mu(e_k - F_k) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Очевидно, функция φ удовлетворяет условиям утверждения, нужно только p_k, F_k заново перенумеровать. Так как мы положили $p_0 = 0$, то $\varphi(\mathbf{x})$ неотрицательна вместе с $f(\mathbf{x})$.

18. *Пусть $f \in L(G)$, где G — ограниченное открытое множество. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется ступенчатая финитная в G функция*

$$\psi(\mathbf{x}) = \begin{cases} a_i, & \mathbf{x} \in \Delta_i, \quad i = 1, \ldots, m, \\ 0 & \textit{для остальных } \mathbf{x}, \end{cases}$$

где $\Delta_i \subset G$ — попарно непересекающиеся кубы с гранями, параллельными осям координат, так что

$$\int\limits_G |f(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} < \varepsilon.$$

Доказательство. Определяем сначала ступенчатую функцию φ (32), удовлетворяющую неравенству (33) (см. свойство **17**), где надо положить $E = G$. Определяем далее фигуры $\sigma_k \subset G$, не пересекающиеся попарно и покрывающие F_k *), и вместе с ними ступенчатую функцию

$$\psi_1(\mathbf{x}) = \begin{cases} c_j, & \mathbf{x} \in \sigma_j \quad (k = 1, \ldots, N), \\ 0 & \text{для остальных } \mathbf{x}, \end{cases}$$

и притом так, чтобы

$$\int_G |\varphi(\mathbf{x}) - \psi_1(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} = \sum_1^N |c_j|\, \mu(\sigma_j - F_j) < \varepsilon,$$

что в силу того, что F_j — попарно не пересекающиеся, ограниченные, замкнутые, таким образом, измеримые, множества, возможно. Каждую фигуру σ_k можно считать суммой конечного числа кубов, пересекающихся разве что по своим границам. Вместо σ_k можно определить фигуры $\sigma'_k \subset \sigma_k$, каждая из которых есть сумма непересекающихся кубов, и ввести ступенчатую функцию

$$\psi(\mathbf{x}) = \begin{cases} c_k, & \mathbf{x} \in \sigma'_k, \\ 0 & \text{для остальных } \mathbf{x}, \end{cases}$$

и притом так, чтобы

$$\int_G |\psi_1 - \psi|\, d\mathbf{x} = \sum_1^N |c_k| \cdot |\sigma_k - \sigma'_k| < \varepsilon.$$

Очевидно, что

$$\int_G |f - \psi|\, d\mathbf{x} \leqslant \int_G |f - \varphi|\, d\mathbf{x} + \int_G |\varphi - \psi_1|\, d\mathbf{x} + \int_G |\psi_1 - \psi|\, d\mathbf{x} < 3\varepsilon,$$

что доказывает утверждение.

19. Теорема Фубини **). *Для измеримой на кубе*

$$\Delta = \{0 \leqslant x_j \leqslant a, \quad j = 1, \ldots, n\}$$

функции $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \mathbf{y})$, $\mathbf{y} = (x_2, \ldots, x_n)$ *имеет место равенство*

$$\int_\Delta f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_0^a dx_1 \int_{\Delta'} f(x_1, \mathbf{y})\, d\mathbf{y}, \quad \Delta' = \{0 \leqslant x_j \leqslant a, \ j = 2, \ldots, n\}, \tag{34}$$

которое надо понимать следующим образом.

Если $f(\mathbf{x}) \in L(\Delta)$, *то почти для всех* x_1 *существует лебегов интеграл*

$$\int_{\Delta'} f(x_1, \mathbf{y})\, d\mathbf{y}, \tag{35}$$

*) Чтобы достичь этого, можно воспользоваться прямоугольной сеткой S, разбивающей R_n на кубы с ребрами длины 2^{-N} (см. § 12.2) при достаточно большом N, положив $\sigma_k = \widetilde{\omega}(F_k)$.

**) Г. Фубини (1879—1943) — итальянский математик.

представляющий собою функцию от x_1 интегрируемую (в лебеговом смысле) на отрезке $[0, a]$. При этом выполняется равенство (34). Но также, если $f(\mathbf{x})$ измерима и неотрицательна на Δ и почти для всех $x_1 \in [0, a]$ существует интеграл (35), в свою очередь интегрируемый по x_1 на $[0, a]$, то $f \in L(\Delta)$.

Другая формулировка теоремы заключается в следующем:

Пусть $E \subset R_n$ — измеримое множество, $E(x_1^0)$ — его сечение плоскостью $x_1 = x_1^0$, т. е. множество всех $\mathbf{y}$, для которых $(x_1^0, \mathbf{y}) \in E$ и $|E(x_1^0)|_*$ — мера ($(n-1)$-мерная) множества $E(x_1^0)$ (если последнее измеримо). Пусть еще G — множество тех значений x_1, для которых $|E(x_1)|_* > 0$.

Тогда справедливо равенство

$$\int\limits_E f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \doteq \int\limits_G dx_1 \int\limits_{E(x_1)} f(x_1, \mathbf{y})\,d\mathbf{y}, \tag{34'}$$

которое надо понимать следующим образом. Если $f \in L(E)$, то G — измеримое одномерное множество, почти для всех $x_1 \in G$ существует внутренний интеграл справа в (34'), представляющий собой интегрируемую по $x_1 \in G$ функцию, и верно равенство (34'). Кроме того, если $f(\mathbf{x})$ — измеримая неотрицательная (не обязательно всюду конечная) на E функция, для которой существует повторный интеграл справа в (34'), то $f \in L(E)$.

Доказательство. Назовем *характеристической функцией множества E* функцию

$$\varphi_E(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in E, \\ 0, & \mathbf{x} \notin E. \end{cases} \tag{36}$$

Если $E \subset \Delta$ измеримо, то очевидно, что

$$\int\limits_\Delta \varphi_E(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int\limits_E d\mathbf{x} = \mu E.$$

Пусть еще $|E(x_1^0)|_*$ есть $(n-1)$-мерная мера сечения E плоскостью $x_1 = x_1^0$.

Теорема очевидна для характеристической функции множества $\sigma_N = \sum\limits_1^N \Delta_k \subset \Delta$, $\mu\sigma_N = \sum\limits_1^N |\Delta_k|$, состоящего из конечного числа кубов (пересекающихся разве что по своим границам). В этом случае равенство (34) сводится к следующему:

$$\mu\sigma_N = \int\limits_0^a dx_1 \int\limits_{\sigma_N(x_1)} d\mathbf{y} = \int\limits_0^a |\sigma_N(x_1)|_*\,dx_1. \tag{37}$$

Докажем лемму.

Лемма 1. *Пусть f, f_N ($N=1, 2, \ldots$) — неотрицательные (принимающие значения конечные или $+\infty$) функции на Δ такие, что*

$$f_N \in L(\Delta), \qquad N=1,\ 2,\ \ldots, \tag{38}$$

$$f_N \to f \tag{39}$$

монотонно и для всех N верна теорема Фубини

$$\int\limits_{\Delta} f_N\, dx = \int\limits_0^a dx_1 \int\limits_{\Delta'} f_N(x_1, \mathbf{y})\, d\mathbf{y}. \tag{40}$$

Тогда существование лебегова интеграла в левой части (34) *влечет существование равного ему повторного интеграла в правой части* (34) *и наоборот.*

Справедливость леммы следует из равенств (пояснения ниже)

$$\int\limits_{\Delta} f\, d\mathbf{x} = \lim_{N\to\infty} \int\limits_{\Delta} f_N\, d\mathbf{x} = \lim_{N\to\infty} \int\limits_0^a dx_1 \int\limits_{\Delta'} f_N(x_1, \mathbf{y})\, d\mathbf{y} =$$

$$= \int\limits_0^a dx_1 \lim_{N\to\infty} \int\limits_{\Delta'} f_N(x_1, \mathbf{y})\, d\mathbf{y} = \int\limits_0^a dx_1 \int\limits_{\Delta'} f(x_1, \mathbf{y})\, d\mathbf{y}, \tag{41}$$

верных в предположении, что существует любой из членов цепи (41). Первое из них следует из (39) (в случае убывания f_N по теореме Лебега и в случае возрастания по свойству 14)). Второе — из (40), третье — снова из (39), потому что интеграл

$$\int\limits_{\Delta'} f_N(x_1, \mathbf{y})\, d\mathbf{y}$$

изменяется монотонно при возрастании N, четвертое тоже следует из (39). В самом деле, если существует четвертый член цепи, то почти для всех $x_1 \in [0, a]$ существует предел

$$\lim \int\limits_{\Delta'} f_N(x_1, \mathbf{y})\, d\mathbf{y} \tag{42}$$

и в силу (39) этот предел равен

$$\int\limits_{\Delta'} f(x_1, \mathbf{y})\, d\mathbf{y}. \tag{43}$$

Наоборот, если существует пятый (последний) член цепи, то почти для всех $x_1 \in [0, a]$ существует интеграл (43), поэтому в силу (39) он равен пределу (42). Этим лемма доказана.

Лемма 2. *Теорема Фубини верна для характеристических функций $\varphi_G(x)$, $\varphi_F(x)$ произвольного ограниченного открытого или замкнутого множества G, $F \subset \Delta$.*

Доказательство. В самом деле, пусть

$$G = \sum_1^\infty \Delta_k, \quad |G| = \sum |\Delta_k|,$$

где Δ_k — замкнутые кубы. Для характеристических функций $\varphi_{\sigma_N}(\mathbf{x})$ фигур $\sigma_N = \sum_1^N \Delta_k$, как мы знаем, теорема Фубини верна, но тогда, в силу леммы 1, она верна и для $\varphi_G(\mathbf{x})$, потому что $\varphi_{\sigma_N}, \varphi_G \in L(\Delta)$; $\varphi_{\rho_N}(\mathbf{x}) \to \varphi_G(\mathbf{x})$, не убывая.

Заметим, что в доказанном равенстве

$$\int\limits_\Delta \varphi_G(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int\limits_0^a dx_1 \int\limits_{\Delta'} \varphi_G(x_1, \mathbf{y})\, d\mathbf{y}$$

внутренний интеграл справа существует для всех $x_1 \in [0, a]$, потому что сечение $G(x_1)$ при любом x_1 есть открытое ограниченное, таким образом, измеримое (в $(n-1)$-мерном смысле) множество.

Пусть теперь $F \subset \Delta$ — замкнутое множество. Поместим F в некоторый открытый куб Δ. Тогда $\Delta - F = G$ — открытое множество и $\varphi_F(\mathbf{x}) = \varphi_\Delta(\mathbf{x}) - \varphi_G(\mathbf{x})$. В силу очевидных аддитивных свойств интегралов, входящих в равенство (34), верность теоремы Фубини для φ_F следует из ее верности для φ_Δ и φ_G.

Лемма 3. *Теорема Фубини верна для характеристической функции $\varphi_e(\mathbf{x})$ произвольного измеримого множества $e \subset \Delta$. В частности, если $|e| = 0$, то почти для всех $x_1 \in [0, a]$ сечение $e(x_1)$ имеет $(n-1)$-мерную меру нуль; наоборот, если e измеримо и почти для всех x_1 сечение $e(x_1)$ имеет $(n-1)$-мерную меру нуль, то $|e| = 0$.*

Доказательство. В самом деле, пусть $e \subset \Delta$ измеримо. Определим две последовательности открытых и замкнутых множеств

$$G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset e \supset \ldots \supset F_2 \supset F_1$$

так, что $|G_k|, |F_k| \to |e|$, $k \to \infty$, и положим

$$\bigcap_1^\infty G_k = \bar{e} \supset e \supset \underline{e} = \bigcup_1^\infty F_k,$$

где очевидно $|G_k| \to |\bar{e}| = |e|$, $|F_k| \to |\underline{e}| = |e|$.

Так как для функций $\varphi_{G_N}(\mathbf{x})$ и $\varphi_{F_N}(\mathbf{x})$ при любом $N = 1, 2, \ldots$ по лемме 2 теорема Фубини верна и они неотрицательны и монотонно стремятся соответственно к $\varphi_{\bar{e}}(\mathbf{x})$ и $\varphi_{\underline{e}}(\mathbf{x})$, то в силу леммы 1 верна также теорема Фубини и для этих последних двух функций:

$$\int_{\Delta} \varphi_e(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_{\Delta} \varphi_{\bar{e}}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_0^a dx_1 \int_{\Delta'} \varphi_{\bar{e}}(x_1, \mathbf{y})\,d\mathbf{y}, \tag{44}$$

$$\int_{\Delta} \varphi_e(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_{\Delta} \varphi_{\underline{e}}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_0^a dx_1 \int_{\Delta'} \varphi_{\underline{e}}(x_1, \mathbf{y})\,d\mathbf{y}. \tag{45}$$

Если теперь $|e| = 0$, то равны также нулю все члены цепи (44), и тогда почти для всех $x_1 \in [0, a]$ равен нулю также внутренний интеграл справа в (44). Но

$$\varphi_{\bar{e}}(\mathbf{x}) \geqslant \varphi_e(\mathbf{x}) \geqslant 0,$$

и поэтому для указанных x_1 очевидно, что существует и равен нулю интеграл

$$\int_{\Delta'} \varphi_e(x_1, \mathbf{y})\,d\mathbf{y} = 0.$$

Следовательно, для таких x_1 функция $\varphi_e(x_1, \mathbf{y})$ по $\mathbf{y}$ измерима и множество $e(x_1) = \{\mathbf{y}: \varphi_e(x_1, \mathbf{y}) = 1\}$ имеет $(n-1)$-мерную меру $|e(x_1)|_* = 0$.

Наоборот, если e измеримо и почти для всех $x_1 \in [0, a]$

$$|e(x_1)|_* = \int_{\Delta'} \varphi_e(x_1, \mathbf{y})\,d\mathbf{y} = 0,$$

то существует равный нулю повторный интеграл

$$\int_0^a dx_1 \int_{\Delta'} \varphi_e(x_1, \mathbf{y})\,d\mathbf{y}$$

и в силу неравенств

$$\varphi_e(\mathbf{x}) \geqslant \varphi_{\underline{e}}(\mathbf{x}) \geqslant 0$$

существует и равен нулю повторный интеграл справа в (45), но тогда существует и равен нулю интеграл слева, следовательно, $|e| = 0$.

Если теперь e — произвольное измеримое множество, то, в силу аддитивных свойств повторных интегралов справа в (44), (45), в них можно заменить $\bar{e}$ и $\underline{e}$ на e, потому что $|\bar{e} - e| = |e - \underline{e}| = 0$. Далее, если повторный интеграл

$$\int_0^a dx_1 \int_{\Delta'} \varphi_e(x_1, \mathbf{y})\,d\mathbf{y}$$

существует, то по той же причине существует равный ему интеграл, состоящий в правой части (44). Этим теорема Фубини для $\varphi_e(\mathbf{x})$, где e — измеримое множество, доказана.

Лемму 3 можно еще выразить при помощи следующих равенств:

$$|e| = \int_0^a |e(x_1)|_* \, dx_1 = \int_\omega |e(x_1)|_* \, dx_1, \quad \omega = \{x_1 : |e(x_1)|_* > 0\}, \quad (46)$$

где $e \subset \Delta$ — произвольное измеримое множество.

Лемма 4. *Теорема Фубини верна для множества e лебеговой меры нуль и какой угодно функции f (конечной, бесконечной и даже неопределенной на e):*

$$\int_e f \, dx = \int_0^a dx_1 \int_{e(x_1)} f(x_1, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y}. \quad (47)$$

Эта лемма есть непосредственное следствие предыдущей леммы 3 и того факта, что интеграл по множеству e меры нуль от любой функции равен нулю. В самом деле, левая часть равенства равна нулю. Кроме того, в силу леммы 3 почти для всех $x_1 \in [0, a]$ мера $|\Delta(x_1)|_* = 0$, а это показывает, что правая часть (47) равна нулю.

Покажем теперь последовательно, что теорема Фубини верна в следующих случаях.

а) f — ступенчатая (конечная) на Δ неотрицательная функция:

$$f(\mathbf{x}) = c_k, \quad \mathbf{x} \in e_k, \quad \sum_{k=1}^\infty e_k = \Delta, \quad e_k e_s = 0 \quad (k \neq s).$$

Ведь в силу леммы 3 функции

$$f_N(\mathbf{x}) = \begin{cases} c_k, & \mathbf{x} \in e_k, \ k = 1, \ldots, N, \\ 0 & \text{для остальных } \mathbf{x} \in \Delta \end{cases}$$

очевидно подчиняются условиям леммы 1.

Таким образом, если ступенчатая неотрицательная функция $f \in L(\Delta)$, то существует повторный интеграл справа в (34), равный левой части (34). Наоборот, если для ступенчатой неотрицательной функции существует указанный повторный интеграл, то $f \in L(\Delta)$.

б) f — неотрицательная конечная измеримая на Δ функция. В самом деле, введем последовательность разбиений R_N ($N = 1, 2, \ldots$), делящих правую полуось точками $p_k^{(N)} = k\,2^{-N}$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$). Соответствующие этим разбиениям нижние ступенчатые функции $f_N(\mathbf{x})$ очевидно удовлетворяют условиям леммы 1.

В данном случае (для неотрицательной конечной f) из того, что функция $f \in L(E)$, следует существование для нее повторного интеграла справа в (34) и наоборот.

Докажем теперь теорему в общем случае. Пусть $f \subset L(\Delta)$ и e — множество (меры нуль), на котором f бесконечна или не определена. Положим

$$f_1(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{x} \in e, \\ f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Delta - e, \end{cases} \quad f = f_{1+} - f_{1-} + f_2,$$

где f_{1+}, f_{1-} определены по f_1, как обычно (см. § 19.3, (22)), а f_2, таким образом, равна нулю почти всюду на Δ. Учитывая очевидные аддитивные свойства интегралов, входящих в (34), и тот факт, что теорема верна для f_{1+}, f_{1-} (см. б) и лемму 4), получим, что она верна для f, т. е. существует повторный интеграл справа в (34) и верно равенство (34).

Пусть теперь f — измеримая неотрицательная на Δ, вообще говоря, не конечная функция и для нее повторный интеграл справа в (34) существует.

В силу того, что f измерима (см. ссылку в начале § 19.2), множество e, где $f = +\infty$, измеримо. Положим $f = f_1 + f_2$, где f_1, f_2 имеют определенный выше смысл. Таким образом, f_1 неотрицательна и конечна на Δ, а $f_2 = 0$ вне e. По условию почти для всех $x_1 \in [0, a]$ интеграл $\int\limits_{\Delta'} f(x_1, \mathbf{y})\, d\mathbf{y}$ конечен, и потому для таких x_1 сечение $e(x_1)$ имеет $(n-1)$-мерную меру нуль. Но тогда $|e| = 0$ (см. лемму 3) и для f_2 справедлива теорема Фубини. Следовательно, существует повторный интеграл справа в (34) для функции $f_1 = f - f_2$, ведь такой интеграл существует для f и f_2. Но тогда (см. б)) $f_1 \in L(\Delta)$ и для f_1 верно равенство (34), следовательно, $f \in L(\Delta)$ и верно равенство (34).

Теорема в первой ее формулировке доказана.

Ясно, что из второй формулировки при $E = \Delta$ следует первая. Но и наоборот. В самом деле, пусть $f \in L(E)$. Положим

$$\bar{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in E, \\ 0, & \mathbf{x} \in \Delta - E, \end{cases} \tag{48}$$

тогда (пояснения ниже)

$$\int\limits_E f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int\limits_\Delta \bar{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int\limits_0^a dx_1 \int\limits_{\Delta'} \bar{f}(x_1, \mathbf{y})\, d\mathbf{y} = \int\limits_G dx_1 \int\limits_{E(x_1)} f(x_1, \mathbf{y})\, d\mathbf{y}. \tag{49}$$

Первое равенство цепи следует из того, что $f \in L(E)$, и потому E измеримо и $\bar{f} = 0$ на измеримом множестве $\Delta - E$. Второе равенство следует из (34). Третье равенство следует из (48) и из того, что G есть измеримое одномерное множество (лемма 3) и $E(x_1)$ измеримо в $(n-1)$-мерном смысле почти для всех $x_1 \subset G$. Аналогично, рассуждая подобным образом и двигаясь по цепи (49) справа налево, получим и вторую часть теоремы, относящуюся к случаю, когда $f \geqslant 0$.

Надо иметь в виду, что функция f может быть такой, что для нее имеет смысл повторный интеграл справа в (34), в то время как она не принадлежит $L(\Delta)$. Конечно, такая функция не сохраняет на Δ знак.

Например, определенная на прямоугольнике $\Delta = \{-1 \leqslant y \leqslant 1, 0 < x \leqslant 1\}$ функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{y^3}, & x \leqslant |y| \leqslant 1, \ 0 < x \leqslant 1, \\ 0 & \text{в остальных точках } \Delta \end{cases}$$

обладает тем свойством, что для нее повторный интеграл на Δ справа в (34) равен нулю, между тем $f \notin L(\Delta)$.

20. Теорема о полноте $L_p(E)$. *Пусть последовательность функций $f_k \in L_p(E)$ $(1 \leqslant p < \infty$ *)) удовлетворяет условию Коши в смысле $L_p(E)$: для всякого $\varepsilon > 0$ существует $N > 0$ такое, что*

$$\int_E |f_k - f_l|^p \, d\mathbf{x} < \varepsilon, \qquad k, l > N. \tag{50}$$

Тогда существует, и притом единственная с точностью до множества лебеговой меры нуль, функция $f \in L_p(E)$, для которой

$$\int_E |f - f_k|^p \, d\mathbf{x} \to 0, \qquad k \to \infty. \tag{51}$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда все функции f_k конечны на E, ведь в общем случае множество, где это может не иметь места, имеет лебегову меру нуль.

Зададим числа $\varepsilon_s > 0$ $(s = 1, 2, \ldots)$ так, чтобы сходился ряд $\sum_1^\infty \varepsilon_s < \infty$, и, пользуясь условием теоремы, подберем подпоследовательность натуральных чисел $k_1 < k_2 < \ldots$ такую, что

$$\left(\int_E |f_{k_{s+1}} - f_{k_s}|^p \, dx \right)^{1/p} < \varepsilon_s, \qquad s = 1, 2, \ldots \tag{52}$$

Справедлива цепь соотношений (пояснения ниже)

$$\sum_N^\infty \varepsilon_s \geqslant \lim_{m \to \infty} \sum_N^{N+m} \left(\int_E |f_{k_{s+1}} - f_{k_s}|^p \, d\mathbf{x} \right)^{1/p} \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{m \to \infty} \left(\int_E \left(\sum_N^{N+m} |f_{k_{s+1}} - f_{k_s}| \right)^p d\mathbf{x} \right)^{1/p} =$$

*) В случае $p = \infty$ считают, что $\left(\int_E |\psi|^p \, dx \right)^{1/p} = \sup_{x \in E} |\psi(\mathbf{x})|$ (или $\operatorname{sur\,vrai}_{x \in E} |\psi(\mathbf{x})|$; см. сноску на стр. 328 § 18.3), и тогда теорема также верна (тривиальным образом).

$$= \left(\int_E \left(\sum_N^{\infty} |f_{k_{s+1}} - f_{k_s}|\right)^p d\mathbf{x}\right)^{1/p} \geqslant$$

$$\geqslant \left(\int_E \left|\sum_N^{\infty} (f_{k_{s+1}} - f_{k_s})\right|^p d\mathbf{x}\right)^{1/p} = \left(\int_E |f - f_{k_N}|^p d\mathbf{x}\right)^{1/p}, \qquad (53)$$

где

$$f(\mathbf{x}) = \lim_{s\to\infty} f_{k_s}(\mathbf{x}) \quad \text{почти всюду на } E. \qquad (54)$$

Первое соотношение в этой цепи следует из (52), второе — из неравенства Минковского (см. § 14.2, (12)). Третье (равенство) верно на основании свойства 14, ведь функция $\left(\sum\limits_N^{N+m} |f_{k_{s+1}} - f_{k_s}|\right)^p$ неотрицательна и при возрастании m не убывает, поэтому ее предел

$$\left(\sum_N^{\infty} |f_{k_{s+1}} - f_{k_s}|\right)^p \in L(E)$$

есть почти всюду конечная, интегрируемая на E функция. Четвертое (неравенство) следует из неравенства

$$\sum_N^{\infty} |f_{k_{s+1}} - f_{k_s}| \geqslant \left|\sum_N^{\infty} (f_{k_{s+1}} - f_{k_s})\right| =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \left|\sum_N^{N+m} (f_{k_{s+1}} - f_{k_s})\right| = \lim_{m\to\infty} (f_{k_{N+m}} - f_{k_N}) = f - f_{k_N}, \qquad (55)$$

где ряд под знаком $|\ |$ во втором члене почти всюду на E сходится. Это обосновывает существование почти всюду на E предела (54), и последнее соотношение (равенство) в (55), таким образом, обосновывает также последнее соотношение (равенство) в (53).

Мы доказали существование функции f, принадлежащей, очевидно, $L_p(E)$, для которой

$$\left(\int_E |f - f_{k_N}|^p d\mathbf{x}\right)^{1/p} < \sum_N^{\infty} \varepsilon_s \to 0, \qquad N \to \infty. \qquad (56)$$

С помощью (50) также следует, что

$$\left(\int_E |f - f_m|^p d\mathbf{x}\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_E |f - f_{k_m}|^p d\mathbf{x}\right)^{1/p} + \left(\int_E |f_{k_m} - f_m|^p d\mathbf{x}\right)^{1/p} \to 0, \quad m \to \infty.$$

Наконец, если допустить, что существует еще одна функция $f_* \in L_p(E)$, для которой $\int\limits_E |f_* - f_m|^p\, d\mathbf{x} \to 0,\ m \to \infty$, то

$$\left(\int\limits_E |f - f_*|^p\, d\mathbf{x}\right)^{1/p} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int\limits_E |f - f_m|^p\, d\mathbf{x}\right)^{1/p} + \left(\int\limits_E |f_m - f_*|^p\, d\mathbf{x}\right)^{1/p} \to 0, \qquad m \to \infty,$$

откуда $\int\limits_E |f - f_*|\, d\mathbf{x} = 0$, но тогда (см. свойство 16) $f(\mathbf{x}) = f_*(\mathbf{x})$ почти всюду на E.

21. *Из соотношения*

$$\int\limits_E |f - f_k|^p\, d\mathbf{x} \underset{k\to\infty}{\to} 0, \qquad f, f_k \in L_p(E) \tag{57}$$

следует существование подпоследовательности $k_1, k_2, \ldots,$ *для которой*

$$\lim_{s\to\infty} f_{k_s}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad \textit{почти всюду на } E. \tag{58}$$

Доказательство. Так как величина

$$\|f\|_{L_p(E)} = \left(\int\limits_E |f|^p\, d\mathbf{x}\right)^{1/p}$$

есть норма в линейном нормированном пространстве $L_p(E)$ (см. § 14.2), то из (57) следует, что $\|f - f_k\|_{L_p(E)} \to 0,\ k \to \infty$. Поэтому выполняется условие Коши: для всякого $\varepsilon > 0$ найдется N такое, что

$$\|f_k - f_l\|_{L_p(E)} \to 0, \qquad k, l > N,$$

т. е. выполняется условие свойства 20. При доказательстве этой теоремы было доказано существование указанной подпоследовательности $\{k_s\}$, для которой выполняется (54) (учесть, что функция f, о которой идет речь в свойстве 20, единственна).

22. *Пусть удовлетворяются условия теоремы* 1, § 12.16 *о замене переменных в кратном интеграле, где, впрочем, теперь предполагается, что* Ω *есть произвольная ограниченная область, таким образом, измеримая по Лебегу (но не обязательно по Жордану).*

1) *Тогда любое измеримое по Лебегу множество* $e \subset \Omega$ *отображается при помощи операции* A *на измеримое же множество* $e' = Ae \subset \Omega'$ *и выполняется неравенство*

$$|e'| \leqslant \varkappa |e|, \tag{59}$$

где $\varkappa$ *— не зависящая от* e *константа.*

2) *Имеет место также равенство (лебеговых) интегралов*

$$\int\limits_{\Omega'} f(\mathbf{x}')\,d\mathbf{x}' = \int\limits_{\Omega} F(\mathbf{x})\,|D(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x}, \tag{60}$$

$$F(\mathbf{x}) = f(A\mathbf{x}), \quad D(\mathbf{x}) = \frac{D(x_1', \ldots, x_n')}{D(x_1, \ldots, x_n)}, \tag{61}$$

верное, если один из них существует.

3) *Если* $E \subset \Omega$ — *произвольное измеримое множество, то*

$$\int\limits_{E'} f(x')\,dx' = \int\limits_{E} F(x)\,|D(x)|\,dx \tag{62}$$

при условии, что существует один из интегралов (62).

Замечание 1. Пусть $E \subset \Omega$ — измеримое множество. Из сформулированного утверждения следует, что измеримо также $E' \subset \Omega'$.

Зададим функцию $f(x') \in L(\Omega')$ и положим

$$f_{E'}(x') = \begin{cases} f(x'), & x' \in E', \\ 0, & x' \notin E'. \end{cases}$$

Очевидно, $f_{E'}(x') \in L(\Omega')$. Поэтому из (60) следует

$$\int\limits_{E'} f(x')\,dx' = \int\limits_{\Omega} f_{E'}(x')\,dx' = \int\limits_{\Omega} f_{E'}(Ax)\,|D(x)|\,dx = \\ = \int\limits_{E} F(x)\,|D(x)|\,dx.$$

В частности, множество $\Omega_0 = \{x\colon D(x) = 0\}$ измеримо, с ним измеримо Ω_0' и, полагая в (60) $f(x') = 1$ на Ω_0' и $f(x') = 0$ вне Ω_0', получим равенство:

$$|\Omega_0'| = \int\limits_{\Omega_0} |D(x)|\,dx = 0. \tag{63}$$

Доказательство. Согласно § 12.16, (6),

$$|\Delta'| = |D(x)|\,|\Delta| + O(\omega(h)|\Delta|), \tag{64}$$

где $\Delta \subset \Omega$ — произвольный куб, h — длина его ребра, $\mathbf{x} \in \Delta$, $\omega(h)$ — непрерывная функция от $h \geqslant 0$ такая, что $\omega(h) \to 0$, $h \to 0$, и константа, входящая в O, не зависит от Δ и $\mathbf{x}$. Если учесть, что $D(\mathbf{x})$ ограничена на Ω, то из (64) следует неравенство $|\Delta'| \leqslant \varkappa|\Delta|$, где $\varkappa$ не зависит от $\Delta \subset \Omega$. Поэтому, если $G \subset \Omega$ — открытое множество, то представляя его в виде счетной суммы

$G=\sum\Delta_k$, $|G|=\sum|\Delta_k|$, кубов Δ_k, получим, что его образ G' имеет меру

$$|G'|=\sum|\Delta_k'|\leqslant\varkappa\sum|\Delta_k|=\varkappa|G|.$$

Если же $e\subset\Omega$ измеримо, то для любого $\varepsilon>0$ найдутся замкнутое и открытое множества F, G такие, что $F\subset e\subset G\subset\Omega$ и $|G-F|<\varepsilon$. Но $(G-F)$ открыто, поэтому

$$|G'-F'|=|(G-F)'|\leqslant\varkappa\varepsilon,$$

и так как F' замкнуто *), а G' открыто и $F'\subset e'\subset G'$, то e' измеримо. К тому же

$$|e'|=\inf_{e'\subset G'}|G'|\leqslant\varkappa\inf_{e\subset G}|G|=\varkappa|e|,$$

и мы доказали утверждение 1), в частности (59).

Пусть теперь $f\in L(\Omega')$. Существует (см. § 18.2, 4) последовательность непрерывных финитных в Ω' функций $f_p(\mathbf{x}')$ ($p=1, 2, \ldots$) таких, что

$$\int_{\Omega'}|f(\mathbf{x}')-f_p(\mathbf{x}')|\,d\mathbf{x}'\to0,\qquad p\to\infty. \tag{65}$$

На основании теоремы 1, § 12.16 верны соотношения

$$\int_{\Omega'}f_p(\mathbf{x}')\,d\mathbf{x}'=\int_{\Omega}f_p(A\mathbf{x})\,|D(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x}\qquad(p=1, 2, \ldots), \tag{66}$$

$$\int_{\Omega}|f_p(A\mathbf{x})\,|D(\mathbf{x})|-f_q(A\mathbf{x})\,|D(\mathbf{x})||\,d\mathbf{x}=$$

$$=\int_{\Omega}|f_p(A\mathbf{x})-f_q(A\mathbf{x})||D(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x}=\int_{\Omega'}|f_p(\mathbf{x}')-f_q(\mathbf{x}')|\,d\mathbf{x}'\to0,$$

$$p, q\to\infty, \tag{67}$$

из которых следует (см. свойство 20) существование функции $\Phi(\mathbf{x})\in L(\Omega)$ такой, что

$$\int_{\Omega}|f_p(A\mathbf{x})\,|D(\mathbf{x})|-\Phi(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x}\to0,\qquad p\to\infty. \tag{68}$$

Но тогда из (65), (66) и (68) следует, что

$$\int_{\Omega'}f(\mathbf{x}')\,d\mathbf{x}'=\int_{\Omega}\Phi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}. \tag{69}$$

Из (65) и (68), кроме того, следует еще существование подпоследовательности значений p, которые мы будем считать заново

*) См. § 7.18, если $D(\mathbf{x})\neq0$ на Ω; в общем случае — § 12.20, теоремы 1, 2.

перенумерованными, так что будут выполняться равенства

$$\lim_{p\to\infty} f_p(\mathbf{x}') = f(\mathbf{x}') \qquad \text{почти всюду на } \Omega',$$

$$\lim_{p\to\infty} f_p(A\mathbf{x})\,|D(\mathbf{x})| = \Phi(\mathbf{x}) \quad \text{почти всюду на } \Omega.$$

Докажем, что

$$\Phi(\mathbf{x}) = f(A\mathbf{x})|D(\mathbf{x})| \quad \text{почти всюду на } \Omega, \tag{70}$$

тогда из (69) будет следовать требуемое равенство (60).

Заметим, что множество точек $\mathbf{x}'$, для которых существует предел $\lim\limits_{p\to\infty} f_p(\mathbf{x}')$, отличный от $f(\mathbf{x}')$, имеет меру нуль. Видоизменим f в таких точках, так чтобы видоизмененное значение $f(\mathbf{x}')$ было равно этому пределу. В результате получим тот же элемент f пространства $L(\Omega')$.

Итак мы считаем, что для тех $\mathbf{x}'$, для которых существует предел $\lim\limits_{p\to\infty} f_p(\mathbf{x}')$, этот предел равен $f(\mathbf{x}')$.

Множество Ω представим в виде суммы трех непересекающихся попарно измеримых множеств

$$\Omega = e_1 + e_2 + e_3$$

следующим образом.

Множество e_1 состоит из точек $\mathbf{x}$, для которых верно равенство

$$\lim_{p\to\infty} [f_p(A\mathbf{x})|D(\mathbf{x})|] = \Phi(\mathbf{x}) \tag{71}$$

и $D(\mathbf{x}) = 0$. Для таких точек, очевидно,

$$\Phi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}')|D(\mathbf{x})| = 0.$$

Множество e_2 состоит из точек $\mathbf{x}$, для которых верно равенство (71) и $|D(x)| > 0$. Для таких точек из существования предела (71) следует существование предела

$$\lim_{p\to\infty} f_p(A\mathbf{x}) = \lim_{p\to\infty} f_p(\mathbf{x}') = f(\mathbf{x}'),$$

а это показывает, что

$$\Phi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}')|D(\mathbf{x})|.$$

Наконец, e_3 состоит из точек, для которых не выполняется равенство (71), но $|e_3| = 0$.

Этим равенство (70) доказано, а с ним (в силу (69)), доказано равенство (60) в предположении, что $f(\mathbf{x}') \in L(\Omega')$.

Замечание 2. Конечно, если $|D(\mathbf{x})| \geqslant m > 0$ на Ω, то существует обратное к A непрерывно дифференцируемое на $\overline{\Omega}'$ преобразование и приведенные рассуждения сохраняются при замене местами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}'$, а также Ω и Ω'. Таким образом, в этом случае надо считать доказанным равенство (60) и в предположении, что в нем правый интеграл имеет смысл.

Если $E \subset \Omega$ измеримо, то в силу (59) измеримо также и множество $E' \subset \Omega'$, и потому, если функция $f(\mathbf{x}') \in L(E')$, то она после ее продолжения на Ω', если считать, что $f(\mathbf{x}') = 0$, $\mathbf{x}' \notin E'$, будет принадлежать $L(\Omega')$, и на основании уже доказанного

$$\int_{E'} f(\mathbf{x}')\,d\mathbf{x}' = \int_{\Omega'} f(\mathbf{x}')\,d\mathbf{x}' = \int_{\Omega} f(A\mathbf{x})\,|D(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x} =$$

$$= \int_{E} f(A\mathbf{x})\,|D(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x}, \qquad (72)$$

т. е. справедливо (62).

Докажем теперь равенство (60) в предположении, что

$$F(\mathbf{x})|D(\mathbf{x})| \subset L(\Omega).$$

Множество Ω представим в виде суммы измеримых непересекающихся множеств.

$$\Omega = \Omega_0 + \Omega_1, \qquad (73)$$
$$\Omega_0 = \{\mathbf{x}\colon\ \mathbf{x} \in \Omega,\ D(\mathbf{x}) = 0\},$$
$$\Omega_1 = \{\mathbf{x}\colon\ \mathbf{x} \in \Omega,\ |D(\mathbf{x})| > 0\}.$$

Множество Ω_1 открыто. Представим его как сумму счетного числа замкнутых кубов $\overline{\Delta}_k$, пересекающихся разве что по своим границам:

$$\Omega_1 = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{\Delta}_k. \qquad (74)$$

Здесь Δ_k есть открытое ядро $\overline{\Delta}_k$. Так как $\overline{\Delta}_k$ — замкнутые кубы, принадлежащие Ω_1, то на каждом из них $|D(\mathbf{x})| > 0$ и, следовательно, существует число $\eta_k > 0$ такое, что $|D(\mathbf{x})| \geqslant \eta_k > 0$ на $\overline{\Delta}_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Поэтому на основании замечания 1, которое надо применить к Δ_k (вместо Ω),

$$\int_{\Delta_k'} f(\mathbf{x}')\,d\mathbf{x}' = \int_{\Delta_k} f(A\mathbf{x})\,|D(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x} \qquad (75)$$

в предположении, что $f(\mathbf{x}') \in L(\Delta_k')$ или $f(A\mathbf{x})|D(\mathbf{x})| \in L(\Delta_k)$.

Отметим, что Δ_k есть область, ее образ $\Delta_k' = A(\Delta_k)$ есть тоже область (см. § 7.18), при этом измеримая по Жордану область (см. теорему 3 § 12.5), граница ее, таким образом, имеет меру 0. Это показывает, что в (72) интегралы по Δ_k, Δ_k' можно заменить на равные им соответственно интегралы по $\overline{\Delta}_k$, $\overline{\Delta}_k'$.

Пусть теперь $F(\mathrm{x})|D(\mathrm{x})| \in L(\Omega)$. Тогда (пояснения ниже)

$$\int\limits_{\Omega} F(\mathrm{x})\,|D(\mathrm{x})|\,d\mathrm{x} = \int\limits_{\Omega_0} F(\mathrm{x})\,|D(\mathrm{x})|\,d\mathrm{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\Delta_k} F(\mathrm{x})\,|D(\mathrm{x})|\,d\mathrm{x} =$$

$$= \int\limits_{\Omega_0} f(\mathrm{x}')\,d\mathrm{x}' + \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\Delta'_k} f(\mathrm{x}')\,d\mathrm{x}' = \int\limits_{\Omega'} f(\mathrm{x}')\,d\mathrm{x}', \qquad (76)$$

и имеет место (60).

Первое равенство в (76) верно в силу (73) и (74). Второе верно потому, что интегралы

$$\int\limits_{\Omega_0} F(\mathrm{x})\,|D(\mathrm{x})| = 0, \qquad \int\limits_{\Omega'_0} f(\mathrm{x}')\,d\mathrm{x}' = 0$$

равны нулю. Ведь $D(\mathrm{x}) = 0$ на измеримом множестве Ω_0, и $|\Omega'_0| = 0$ в силу уже доказанного равенства (63).

Докажем наконец (63). Вместе с E измеримо и E'. Пусть $f(\mathrm{x}') \in L(E')$. Продолжим функцию $f(\mathrm{x}')$ на Ω', считая ее равной нулю вне E', и применим к ней уже доказанное равенство (59). Из него в данном случае следует (63), потому что $F(\mathrm{x})|D(\mathrm{x})| = 0$ вне E. Аналогично, если $F(\mathrm{x})|D(\mathrm{x})| \in L(E)$, продолжим $F(\mathrm{x})$ на Ω, считая $F(\mathrm{x})$ равным нулю вне E, и применим к $F(\mathrm{x})$ равенство (60), которое влечет за собой в данном случае (63).

Замечание 3. Равенство (62) было доказано в предположении, во-первых, что один из интегралов, входящих в него, существует и, во-вторых, что E измеримо. Конечно, измеримость E входит в требование существования правого интеграла (по x на E).

Однако, когда мы исходим из существования левого интеграла в (62) (по x' на E'), дополнительное условие, что множество E должно быть измеримым, вообще говоря, необходимо. Точнее, *если множество* Ω_0 (см. (73)) *имеет меру нуль* ($|\Omega_0| = 0$), *то из измеримости* $E' \subset \Omega'$ *следует измеримость* E, *если же мера* $|\Omega_0| > 0$, *то это, вообще говоря, не так.*

В самом деле, пусть $|\Omega_0| = 0$ и $E' \subset \Omega'$ — измеримое множество. Запишем E в виде

$$E = E\Omega_0 + \bigcup_{k=1}^{\infty} (E\overline{\Delta}_k).$$

Так как $|\Omega_0| = 0$, то $|E\Omega_0| = 0$. Что же касается множеств $E\overline{\Delta}_k$,

$$E\overline{\Delta}_k = A^{-1}((E\overline{\Delta}_k)') \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

то они измеримы, потому что они являются образами измеримых множеств $(E\overline{\Delta}_k)' = E'(\overline{\Delta}_k)'$ при помощи непрерывно дифференцируемой (соответственно на $\overline{\Delta}'_k$) операции A^{-1}. Это показывает, что E измеримо.

Случай $|\Omega_0| > 0$ придется пояснить примером. Мы ограничиваемся одномерным случаем.

Пример. Рациональные точки отрезка [0, 1] перенумеруем (x_1, x_2, ...) и покроем k-ю из них интервалом σ_k с центром в ней, имеющим длину $\varepsilon 2^{-k}$ $(0<\varepsilon<1,\ k=1,\ 2,\ \ldots)$. Множество $G=\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_l$ открытое. Некоторые интервалы σ_l пересекаются между собой, но всегда можно G представить в виде суммы уже не пересекающихся между собой интервалов (см. § 7.9, теорема 4)

$$G=\bigcup_{k=1}^{\infty}\lambda_l.$$

Дополнение к G до отрезка $[0,\ 1]$ есть замкнутое множество (см. § 7.9), которое мы обозначим через F $(F=[0,\ 1]\backslash G)$. Лебегова мера F оценивается следующим образом:

$$|F|\geqslant 1-\sum_{k=1}^{\infty}|\delta_k|=1-\varepsilon>0.$$

Для нас важно, что F имеет положительную меру. Но несмотря на это любой отрезок $\sigma\subset[0,\ 1]$ содержит в себе точки множества G, ведь на σ имеются рациональные точки, покрытые некоторыми интервалами σ_k, которые принадлежат G.

Определим на $[0,\ 1]$ непрерывную функцию $\psi(x)$, равную нулю на F и положительную на интервалах $\lambda=\lambda_l$ (смежности к F). Например, график ψ на каком-либо интервале λ может представлять собой верхнюю полуокружность радиуса $|\lambda|/2$ с центром в середине λ, где $|\lambda|$ — длина λ.

Функция

$$\varphi(x)=\int_0^x\psi(t)\,dt\qquad(0\leqslant x\leqslant 1)$$

непрерывно дифференцируема и строго возрастает на $[0,\ 1]$:

$$\varphi(x_2)-\varphi(x_1)=\int_{x_1}^{x_2}\psi(t)\,dt>0\qquad(0\leqslant x_1<x_2\leqslant 1).$$

Ведь $\psi(t)\geqslant 0$ на $[0,\ 1]$, и любой отрезок $[x_1,\ x_2]\subset[0,\ 1]$ содержит в себе интервалы λ, на которых $\psi(t)>0$.

Таким образом, функция $x'=\varphi(x)$ отображает отрезок $[0,\ 1]$ на отрезок $[0,\ A]$ $\left(A=\int_0^1\psi(t)\,dt>0\right)$ взаимно однозначно и непрерывно в обе стороны, однако непрерывно дифференцируемо только в сторону $x\to x'$.

Множество

$$\Omega_0=\{x\colon\ x\in[0,\ 1],\ \varphi'(x)=0\}=F$$

положительной меры $(|\Omega_0|=|F|>0)$. Его образ $\Omega_0'=\varphi(\Omega_0)$, получаемый посредством функции φ, имеет меру нуль:

$$|\Omega_0'|=\int_{\Omega_0'}1\,dx'=\int_{\Omega_0}\varphi'(x)\,dx=0.$$

Если $e\subset[0,\ 1]$ — произвольное измеримое множество, то множество $e'=\varphi(e)$ тоже измеримо и

$$|e'|=\int_e\varphi'(x)\,dx\qquad(\varphi'(x)=\psi(x)\geqslant 0).$$

Однако существуют измеримые множества $e' \subset [0, A]$ такие, что e неизмеримы ($e' = \varphi(e)$).

В самом деле, так как $|F| > 0$, то среди множеств $e \subset F$ найдутся, как это можно доказать, неизмеримые, а им соответствующие множества $e' \in \Omega_0' = F'$ имеют меру нуль, т. е. они измеримы.

Замечание 4. Рассмотренное выше множество G может служить примером ограниченного открытого неизмеримого в смысле Жордана множества. Поясним последнее свойство. Внутренняя жорданова мера G равна его лебеговой мере (см. § 19.1, (2)):

$$mG = |G| < \varepsilon.$$

С другой стороны, если отрезок $[0, 1]$ разделить на части точками $0 = x_0 < x_2 < \ldots < x_N = 1$, то любая часть $[x_k, x_{k+1}]$ содержит в себе рациональные точки и, следовательно, точки G. Поэтому внешняя жорданова мера G

$$m_e G = 1 > \varepsilon > m_i G.$$

Пусть E есть измеримое по Жордану множество, и $\bar{E}$ — его замыкание (тоже, очевидно, измеримое по Жордану!). Если функция интегрируема по Риману на $\bar{E}$, то справедливо равенство

$$\int_E f\,dx = \int_{\bar{E}} f\,dx, \tag{77}$$

так как $\bar{E}\setminus E$ принадлежит Γ — границе E, а Γ имеет жорданову меру ноль.

Для интеграла Лебега равенство (77) не всегда выполняется, и в этом смысле интеграл Римана имеет преимущество перед интегралом Лебега. Например, пусть $\bar{E}$ есть отрезок $[0, 1]$, а E — множество принадлежащих ему рациональных чисел. Оба эти множества измеримы по Лебегу, и $m(\bar{E}\setminus E) = 1$, поэтому, если функция f интегрируема по Лебегу на $[0, 1] = \bar{E}$ и положительна на $\bar{E}\setminus E$, то (см. § 19.2, теорема 5)

$$\int_{\bar{E}/E} f\,dx > 0$$

и равенство (77) не выполняется.

Итак, для рассматриваемого нами открытого множества E лебегова мера

$$m(\bar{E}\setminus E) = m\Gamma > 0,$$

и для интегрируемых по Лебегу на $\bar{E}$ функций, положительных на $\bar{E}\setminus E$, равенство (77) не выполняется.

Конечно, если E измеримо по Жордану, то (77) выполняется для любой функции $f \in L(\bar{E})$, потому что в этом случае мера $\bar{E}\setminus E$ в жордановом смысле, а следовательно, и в лебеговом смысле равна нулю.