§ 19.4. Интеграл Лебега на неограниченном множестве

Обобщая введенное в предыдущем параграфе понятие интеграла Лебега, говорят, что функция $f \in L(E)$, и называют ее *интегрируемой по Лебегу* на E, если $f \in L(VE)$ в смысле уже известного из предыдущего параграфа определения, каков бы ни был шар $V \in R_n$, и если существует предел

$$\lim_{N\to\infty} \int_{EV_N} |f(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} = \int_E |f(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} \tag{1}$$

для произвольной последовательности шаров $V_N \subset R_n$ радиуса N с центром в нулевой точке.

В этом определении, очевидно, шары V можно считать как замкнутыми, так и открытыми, и все равно оно выражает одно и то же понятие; очевидно, что существование предела (1) для одной какой-либо указанной последовательности шаров V_N влечет существование его для другой, и эти пределы равны между собой.

Символ справа в (1) есть обозначение интеграла Лебега от $|f|$ на E. Интеграл же от f на E определяется как предел

$$\lim_{N\to\infty} \int_{EV_N} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_E f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}. \tag{2}$$

Он существует, ведь из (1) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое N, что для любых $n' > n > N$

$$\left| \int_{EV_{n'}} f\, d\mathbf{x} - \int_{EV_n} f\, d\mathbf{x} \right| = \left| \int_{E(V_{n'}-V_n)} f\, d\mathbf{x} \right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_{E(V_{n'}-V_n)} |f|\, d\mathbf{x} = \left| \int_{EV_{n'}} |f|\, d\mathbf{x} - \int_{EV_n} |f|\, d\mathbf{x} \right| < \varepsilon.$$

Впрочем, эти рассуждения вполне аналогичны тем, которые приводились в своем месте для обоснования сходимости абсолютно сходящихся несобственных римановых интегралов.

Ясно, что если E есть ограниченное множество, то приведенное здесь определение функции $f \in L(E)$ совпадает с уже известным нам из предыдущего параграфа определением интегрируемой по Лебегу функции. Обобщение возникает, если E есть неограниченное множество, однако такое, что EV измеримо для любого шара V. Примерами таких множеств могут служить произвольные замкнутые или открытые множества. Ведь пересечение замкнутого множества с замкнутым шаром есть замкнутое (измеримое) множество, а пересечение открытого множества с открытым же шаром есть открытое (измеримое) множество.

Доказанные в предыдущем параграфе свойства 1—21 интеграла Лебега сохраняются и для введенных здесь интегралов.

Соответствующие утверждения могут быть усилены тем, что под множеством меры нуль теперь можно понимать множество E такое, что EV для любого шара V имеет меру нуль в прежнем понимании этого термина. (См., например, § 19.3, свойства 1, 2, 4, 5.) Впрочем, в предпосылках соответствующих утверждений надо заменять термины «измеримое множество E» или «измеримая на E функция» соответственно на следующие термины: «множество E такое, что VE измеримо для любого шара V» или «функция f, измеримая на VE для любого шара V».

Функция f называется *локально измеримой* на E, если она измерима на EV, каков бы ни был шар V.

Доказательство каждого из указанных свойств сводится к тому, что мы устанавливаем его верность для множества EV_N при любом N (радиусе V_N), а затем убеждаемся в сохранении этого свойства после перехода к пределу при $N \to \infty$. Впрочем, свойство 6, § 19.3 не имеет отношения к рассматриваемым обобщениям.

Приведем несколько примеров таких рассуждений.

Свойство 4. *Если $E_1 \subset E$, VE_1 измеримо для любого шара V и $f \in L(E)$, то $f \in L(E_1)$.*

В самом деле, тогда $VE_1 \subset VE$, VE_1 измеримо и $f \in L(VE)$, и потому в силу свойства 4 из § 19.3 $f \in L(VE_1)$ при любом V. Кроме того,

$$\lim_{N \to \infty V} \int\limits_{V_N E} |f|\, d\mathbf{x} < \infty,$$

но тогда в силу неравенств

$$\int\limits_{V_N E_1} |f|\, d\mathbf{x} \leqslant \int\limits_{V_N E} |f|\, d\mathbf{x} \leqslant \int\limits_{E} |f|\, d\mathbf{x}$$

и монотонного неубывания его левой части при возрастании N существует предел

$$\lim_{N \to \infty} \int\limits_{V_N E_1} |f|\, d\mathbf{x} < \infty$$

и $f \in L(E_1)$.

Свойство 8. *Если F измерима на VE для любого шара V, $0 \leqslant F(\mathbf{x}) \leqslant \Phi(\mathbf{x})$, $\Phi \in L(E)$, то $F \in L(E)$.*

Доказательство. В силу свойства 8 из § 19.3, данное утверждение верно, если заменить в нем E на VE. Таким образом, $\Phi \in L(VE)$ при любом V. Кроме этого,

$$\int\limits_{EV_N} F(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \leqslant \int\limits_{EV_N} \Phi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \tag{3}$$

при любом N, и так как предел правой части (3) при $N \to \infty$ по условию конечен, то конечен ($F(x) \geqslant 0$) и предел левой, и мы доказали, что $F \in L(F)$.

Свойство 13. *Теорема Лебега* (формулировку см. свойство 13 из § 19.3).

Доказательство. В силу доказанного уже для измеримого множества свойства 13 из § 19.3 очевидно, что

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_{EV} f_k(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int\limits_{EV} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \tag{4}$$

и $f\in L(VE)$ при любом шаре V, следовательно, $f\in L(E)$, потому что $|f|\leqslant\Phi$ на E и $\Phi\in L(E)$.

Зададим $\varepsilon>0$ и подберем $V=V_N$ так, чтобы $\int\limits_{E-V}\Phi\,d\mathbf{x}<\frac{\varepsilon}{2}$.

Тогда в силу (4)

$$\left|\int\limits_E f\,d\mathbf{x}-\int\limits_E f_k d\mathbf{x}\right|\leqslant\int\limits_{E-V}|f|\,d\mathbf{x}+\int\limits_{E-V}|f_k|\,d\mathbf{x}+$$
$$+\left|\int\limits_{EV}(f_k-f)\,d\mathbf{x}\right|<2\int\limits_{E-V}|\Phi|\,d\mathbf{x}+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{3\varepsilon}{2},\quad k>k_0,$$

где k_0 достаточно велико.

Свойство 17. Формулировку см. свойство 17 из § 19.3.

Доказательство. Подберем V так, чтобы

$$\int\limits_{E-V}|f|\,d\mathbf{x}<\varepsilon,$$

и определяем функцию

$$f_1(\mathbf{x})=\begin{cases}0 & \mathbf{x}\in E-V,\\ f(x), & \mathbf{x}\in EV,\end{cases}\qquad \int\limits_{E-V}|f-f_1|\,d\mathbf{x}<\varepsilon.$$

К последней применимо свойство 17 из § 19.3.

Свойство 18. Формулировка такая же, как в свойстве 18 из § 19.3, но теперь G — произвольное открытое, не обязательно ограниченное множество. Доказательство такое же, как в свойстве 17.

Свойство 19. Теорема Фубини. *Справедливо равенство*

$$\int\limits_{R_n} f\,d\mathbf{x}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx_1\int\limits_{R'} f(x_1,\mathbf{y})\,d\mathbf{y}, \tag{5}$$

где R' — $(n-1)$-*мерное пространство точек* $\mathbf{y}=(x_2,\ldots,x_n)$ *при условиях, изложенных в свойстве* 19 *из* § 19.3, *где надо считать* f *локально измеримой на* R_n.

Доказательство. Пусть пока $f(x)\geqslant 0$, положим

$$\Delta_N=\{|x_j|<N;\quad j=1,\ldots,n\},$$
$$\Delta'_N=\{|x_j|<N;\ j=2,\ldots,n\},\quad N=1,2,\ldots$$

и

$$f_N(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Delta_N, \\ 0 & \text{для других } \mathbf{x}. \end{cases}$$

В силу свойства 19 из § 19.3 для f_N имеет место теорема Фубини:

$$\int_{R_n} f_N\, d\mathbf{x} = \int_{\Delta_N} f\, d\mathbf{x} = \int_{-N}^{N} dx_1 \int_{\Delta_N'} f(x_1, \mathbf{y})\, d\mathbf{y} = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{R'} f_N(x_1, \mathbf{y})\, d\mathbf{y}$$

(в двух указанных там смыслах) и, кроме того,

1) $f_N \in L(R_n)$, $N = 1, 2, \ldots$,

2) $f_N \leqslant f$ на R_n,

3) $f_N \to f$ на R_n, не убывая.

Но тогда имеет место и равенство (5) в силу леммы 1 в 19 из § 19.3, где надо заменить Δ, Δ' соответственно на R_n, R'. При такой замене доказательство ее аналогично.

Случай функции f произвольного знака рассматривается, как в 19 из § 19.3, полагая $f = f_+ - f_-$.

Свойство 20. Теорема о полноте $L_p(E)$. Формулировка такая же как в 20 из § 19.3.

Доказательство. Пусть $V \subset R_n$ — произвольный шар и $\varepsilon > 0$. В силу условия теоремы найдется $N > 0$ такое, что

$$\varepsilon > \int_E |f_k - f_l|^p d\mathbf{x} \geqslant \int_{EV} |f_k - f_l|^p d\mathbf{x}, \quad k, l > N.$$

Но тогда по свойству 20 § 19.3 на EV, а в силу произвольности V и на всем пространстве R_n существует (с точностью до эквивалентности на R_n) единственная функция f такая, что

$$\int_{EV} |f_k(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \to 0.$$

Для нее $\varepsilon \geqslant \int_{EV} |f_k - f|^p d\mathbf{x}$, $k > N$, каково бы ни было V. Но тогда $|f_k - f|^p \in L(E)$ и

$$\varepsilon \geqslant \int_E |f_k - f|^p d\mathbf{x}, \quad k > N.$$

При этом $f \in L_p(E)$, потому что $f_k \in L_p(E)$ и $f_k - f \in L_p(E)$.

§ 19.5. Обобщенная производная по Соболеву

Пусть $G \subset R_n$ область. Обозначим через D множество всех бесконечно дифференцируемых финитных в G функций φ.

Говорят, что функция *локально интегрируема* на G, если она определена на G и интегрируема (по Лебегу) на любом замкнутом шаре, принадлежащем к G.