и

$$f_N(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Delta_N, \\ 0 & \text{для других } \mathbf{x}. \end{cases}$$

В силу свойства 19 из § 19.3 для f_N имеет место теорема Фубини:

$$\int_{R_n} f_N\, d\mathbf{x} = \int_{\Delta_N} f\, d\mathbf{x} = \int_{-N}^{N} dx_1 \int_{\Delta'_N} f(x_1, \mathbf{y})\, d\mathbf{y} = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{R'} f_N(x_1, \mathbf{y})\, d\mathbf{y}$$

(в двух указанных там смыслах) и, кроме того,

1) $f_N \in L(R_n)$, $N = 1, 2, \ldots$,

2) $f_N \leqslant f$ на R_n,

3) $f_N \to f$ на R_n, не убывая.

Но тогда имеет место и равенство (5) в силу леммы 1 в 19 из § 19.3, где надо заменить Δ, Δ' соответственно на R_n, R'. При такой замене доказательство ее аналогично.

Случай функции f произвольного знака рассматривается, как в 19 из § 19.3, полагая $f = f_+ - f_-$.

Свойство 20. Теорема о полноте $L_p(E)$. Формулировка такая же как в 20 из § 19.3.

Доказательство. Пусть $V \subset R_n$ — произвольный шар и $\varepsilon > 0$. В силу условия теоремы найдется $N > 0$ такое, что

$$\varepsilon > \int_E |f_k - f_l|^p d\mathbf{x} \geqslant \int_{EV} |f_k - f_l|^p d\mathbf{x}, \quad k, l > N.$$

Но тогда по свойству 20 § 19.3 на EV, а в силу произвольности V и на всем пространстве R_n существует (с точностью до эквивалентности на R_n) единственная функция f такая, что

$$\int_{EV} |f_k(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \to 0.$$

Для нее $\varepsilon \geqslant \int_{EV} |f_k - f|^p d\mathbf{x}$, $k > N$, каково бы ни было V. Но тогда $|f_k - f|^p \in L(E)$ и

$$\varepsilon \geqslant \int_E |f_k - f|^p d\mathbf{x}, \quad k > N.$$

При этом $f \in L_p(E)$, потому что $f_k \in L_p(E)$ и $f_k - f \in L_p(E)$.

§ 19.5. Обобщенная производная по Соболеву

Пусть $G \subset R_n$ область. Обозначим через D множество всех бесконечно дифференцируемых финитных в G функций φ.

Говорят, что функция *локально интегрируема* на G, если она определена на G и интегрируема (по Лебегу) на любом замкнутом шаре, принадлежащем к G.

По определению (Соболева) функция F имеет на G *обобщенную частную производную* f *по переменной* x_1, обозначаемую через $\frac{\partial F}{\partial x_1}$, если обе функции F и f локально интегрируемы на G и если выполняется равенство

$$\int F \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} d\mathbf{x} = -\int f\varphi\, d\mathbf{x} \quad \text{для всех } \varphi \in D. \tag{1}$$

Здесь можно считать, что интегралы берутся по носителю функции φ (замкнутому ограниченному множеству), или по области G, даже по всему пространству R_n, если считать, что F и f как-то продолжены на R_n, например, положено $f = F = 0$ на $R_n - G$.

Если f есть обобщенная производная на G по x_1 от F и f_1, F_1 эквивалентны соответственно f, F, то и f_1 есть обобщенная производная на G по x_1 от F_1. Ведь изменение f и F на множестве меры нуль не нарушает равенство (1). G может быть неограниченным.

Чтобы оправдать эту терминологию, достаточно отметить, что если функция F непрерывна на G вместе со своей частной производной $\frac{\partial F}{\partial x_1} = f$, то для нее равенство (1) выполняется и, следовательно, f является не только обычной, но и обобщенной производной от F по x_1 на G. Ведь если функция $\varphi \in D$, то ее носитель есть ограниченное замкнутое множество, принадлежащее G; его можно покрыть фигурой $\sigma \subset G$ (конечной системой замкнутых кубов) и, пользуясь классическими теоремами о сведении кратного интеграла (Римана) к повторному, интегрированием по частям и тем фактом, что $\varphi = 0$ на границе σ, получить

$$\int F \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} d\mathbf{x} = \int_\sigma F \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} d\mathbf{x} = \int d\mathbf{y} \int F \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 = -\int d\mathbf{y} \int \frac{\partial F}{\partial x_1} \varphi\, dx_1,$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \mathbf{y}) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Мы не расставили в третьем и четвертом членах этой цепи пределы интегрирования, чтобы не усложнять запись.

Теорема 1. *Пусть f есть обобщенная производная от F по x_1 на G.*

Тогда ε — усреднение F_ε (см. § 18.2) *функции F — обладает свойствами*

$$\|F_\varepsilon - F\|_{L(e)} \to 0, \quad \left\|\frac{\partial}{\partial x} F_\varepsilon - f\right\|_{L(e)} \to 0 \quad (\varepsilon \to 0), \tag{2}$$

каково бы ни было замкнутое ограниченное множество $e \subset G$.

Доказательство. Первое свойство (2) выражает обычное свойство усреднения (см. § 18.2 (5))

$$F_\varepsilon(\mathbf{x}) = \int \varphi_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{t}) F(\mathbf{t})\, d\mathbf{t}.$$

Пусть G_ε — множество точек $\mathbf{x} \in G$, отстоящих на расстоянии не меньшем, чем $\varepsilon > 0$, до границы G, и ε настолько мало, что $G_\varepsilon \supset \bar{e}$. Тогда для $\mathbf{x} \in e$

$$F'_\varepsilon = \frac{\partial}{\partial x_1} F_\varepsilon(\mathbf{x}) = \int \frac{\partial}{\partial x_1} \varphi_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{t}) F(\mathbf{t})\, d\mathbf{x} =$$
$$= -\int \frac{\partial}{\partial t_1} \varphi_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{t}) F(\mathbf{t})\, d\mathbf{t} = \int \varphi_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{t}) f(\mathbf{t})\, d\mathbf{t} = f_\varepsilon(\mathbf{x}),$$

где предпоследнее равенство справедливо в силу того, что f есть обобщенная производная от F по x_1, и того, что $\varphi_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{t})$ по t при фиксированном $\mathbf{x} \in e \subset G_\varepsilon$ есть функция класса D. Поэтому верно и второе свойство (2).

Из теоремы 1 непосредственно вытекает

Следствие. *Функция F может иметь на G единственную обобщенную производную f (с точностью до эквивалентности).*

Ведь $f = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} F'_\varepsilon$ в смысле $L(\Delta)$ для любого замкнутого куба $\Delta \subset G$.

Теорема 2. *Пусть F и f — функции, локально интегрируемые на области G. Для того чтобы f была обобщенной производной $\frac{\partial F}{\partial x_1}$ на G, необходимо и достаточно существование последовательности функций Φ_k $(k = 1, 2, \ldots)$, непрерывных на $\bar{G}$ вместе со своими частными производными $\frac{\partial \Phi_k}{\partial x_1}$, таких, что для любого замкнутого куба $\Delta \subset G$, или, что все равно, для любого ограниченного замкнутого множества, принадлежащего к G, имеют место соотношения*

$$\|F - \Phi_k\|_{L(\Delta)} \to 0, \quad \left\| f - \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_1} \right\|_{L(\Delta)} \to 0 \quad (k \to \infty). \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $f = \frac{\partial F}{\partial x_1}$ на G. В силу теоремы 1 соотношения (3) будут выполнены, если положить $\Phi_k = F_{1/k}$, где F_ε есть ε-усреднение F.

Пусть, наоборот, для функций Φ_k, непрерывных на G вместе со своими производными $\frac{\partial \Phi_k}{\partial x_1}$, выполняются соотношения (3) для любых замкнутых кубов $\Delta \subset G$. Тогда, очевидно, эти соотношения будут выполняться, если считать, что Δ есть произвольное, принадлежащее к G замкнутое множество, потому что его можно покрыть фигурой — конечным числом замкнутых кубов, принадлежащих к G.

Зададим произвольную функцию $\varphi \in D$. Для функций Φ_k, как мы знаем, выполняется равенство

$$\int_\sigma \Phi_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\, d\mathbf{x} = -\int_\sigma \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_1} \varphi\, d\mathbf{x}, \tag{4}$$

где σ есть фигура, покрывающая носитель φ. Переходя к пределу в этом равенстве при $k \to \infty$, получим (пояснения ниже)

$$\int F \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\, d\mathbf{x} = -\int f\varphi\, d\mathbf{x} \tag{5}$$

(где σ под знаком интеграла опущено). Это доказывает, что f есть обобщенная частная производная по x_1 на G от F.

Интегралы в (5) имеют смысл по Лебегу, потому что F, $f \in L(\sigma)$, а функции φ, $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$ непрерывны и ограничены $\left(|\varphi|, \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right| \leqslant M\right)$. Кроме того в силу (3), где надо заменить Δ на σ,

$$\left|\int \Phi_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\, d\mathbf{x} - \int F \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\, d\mathbf{x}\right| \leqslant M \int_\sigma |\Phi_k - F|\, d\mathbf{x} \to 0 \quad (k \to \infty),$$

$$\left|\int \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_1} \varphi\, d\mathbf{x} - \int f \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\, d\mathbf{x}\right| \leqslant M \int_\sigma \left|\frac{\partial \Phi_k}{\partial x_1} - f\right| d\mathbf{x} \to 0 \quad (k \to \infty);$$

поэтому из (4) следует (5).

Теорема 3. *Пусть f и F — функции, локально интегрируемые на области G. Для того чтобы f была обобщенной производной по x_1 на G от F, необходимо и достаточно, чтобы, каков бы ни был принадлежащий к G замкнутый прямоугольник $\Delta = \{a_i \leqslant x_i \leqslant b_i;\ i = 1, \ldots, n\}$ с проекцией $\Delta' = \{a_i \leqslant x_i \leqslant b_i;\ i = 2, \ldots, n\}$, функция F после возможного видоизменения ее на множестве n-мерной меры нуль представлялась в виде*

$$F(\mathbf{x}) = F(x_1, \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{y}) + \int_{a_1}^{x_1} f(t, \mathbf{y})\, dt \tag{6}$$

почти для всех $\mathbf{y} = (x_2, \ldots, x_n) \in \Delta'$ (в смысле $(n-1)$-мерной меры) и любого $x_1 \in [a_1, b_1)$, где $\lambda \in L(\Delta')$ — некоторая единственная *) *функция от* $\mathbf{y}$.

В одномерном случае, когда f и F локально интегрируемы на $(c, d) = G$, и для того чтобы f была обобщенной производной

---

*) Из равенства (6), верного почти всюду (в n-мерном смысле) для $\lambda(\mathbf{y})$, равного $\lambda_1(\mathbf{y})$ или $\lambda_2(\mathbf{y})$, следует, что $\lambda_1(\mathbf{y}) = \lambda_2(\mathbf{y})$ почти всюду в n-мерном, но тогда и в $(n-1)$-мерном смысле.

$f(\mathbf{x}) = F'(\mathbf{x})$ на (c, d), необходимо и достаточно, чтобы для любого отрезка $[a, b] \subset (c, d)$ имело место представление

$$F(x) = A + \int_a^x f(t)\,dt, \qquad f \in L(a, b), \tag{6'}$$

где A — константа.

Доказательство. Пусть f есть обобщенная производная от F по x_1 на G. Тогда в силу предыдущей теоремы существует последовательность функций F_k, непрерывных вместе со своими частными производными $\frac{\partial F_k}{\partial x_1}$, такая, что каков бы ни был указанный прямоугольник Δ,

$$\|F - F_k\|_{L(\Delta)} \to 0, \qquad \left\|f - \frac{\partial F_k}{\partial x_1}\right\|_{L(\Delta)} \to 0 \qquad (k \to \infty). \tag{7}$$

Имеют место классические равенства

$$F_k(x, \mathbf{y}) = F_k(a_1, \mathbf{y}) + \int_{a_1}^{x_1} \frac{\partial F_k}{\partial x_1}(t, \mathbf{y})\,dt, \tag{8}$$

а в одномерном случае

$$F_k(x) = A + \int_a^x F_k'(t)\,dt. \tag{8'}$$

Из них и следует (6), соответственно (6′), после перехода к пределу при $k \to \infty$ в метрике $L(\Delta)$.

Чтобы доказать это утверждение, заметим, что так как по условию интеграл $\int_{\Delta'} d\mathbf{y} \int_{a_1}^{b_1} |f(t, \mathbf{y})|\,dt = \|f\|_{L(\Delta)}$ существует, то существует также (см. свойство 4 из § 19.3) интеграл

$$\int_{\Delta'} dy \int_{a_1}^{x_1} |f(t, \mathbf{y})|\,dt,$$

к тому же представляющий собой непрерывную функцию от x_1 (см. § 19.3, свойство 11). Поэтому существует трехкратный интеграл

$$\int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{\Delta'} d\mathbf{y} \int_{a_1}^{x_1} |f(t, \mathbf{y})|\,dt,$$

а вместе с ним и трехкратный интеграл

$$\int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{\Delta'} d\mathbf{y} \int_{a_1}^{x_1} f(t, \mathbf{y})\, dt.$$

Следовательно, в силу теоремы Фубини

$$\Phi(x_1, \mathbf{y}) = \int_{a_1}^{x_1} f(t, \mathbf{y})\, dt \in L(\Delta).$$

Так как интеграл $\int_{a_1}^{b_1} f(t, \mathbf{y})\, dt$ существует почти для всех $\mathbf{y} \in \Delta'$, то $\Phi(x_1, \mathbf{y})$ существует для этих $\mathbf{y}$ и любого $x_1 \in [a_1, b_1]$.

В одномерном случае это утверждение упрощается — функция

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

непрерывна на $[a, b]$ и, следовательно, принадлежит к $L(a, b)$.

Имеем

$$\left\| \int_{a_1}^{x_1} \frac{\partial F_k}{\partial x_1}(t, \mathbf{y})\, dt - \int_{a_1}^{x_1} f(t, \mathbf{y})\, dt \right\|_{L(\Delta)} \leqslant \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{\Delta'} d\mathbf{y} \int_{a_1}^{b_1} \left| \frac{\partial F_k}{\partial x_1} - f \right| dt =$$

$$= (b_1 - a_1) \left\| \frac{\partial F_k}{\partial x_1} - f \right\|_{L(\Delta)} \to 0, \quad k \to \infty. \qquad (9)$$

Кроме того, по условию $\|F_k - F\|_{L(\Delta)} \to 0$, $k \to \infty$. Но тогда (см. (8)) функция $F_k(a_1, \mathbf{y})$ тоже стремится в метрике $L(\Delta)$ а, следовательно, и $L(\Delta')$ к некоторой функции $\lambda(\mathbf{y}) \in L(\Delta')$, и мы получили равенство (6), верное почти для всех $\mathbf{x} \in \Delta$. При этом правая часть (6) определена почти для всех $\mathbf{y} \in \Delta'$ и л ю б ы х $x_1 \in [a_1, b_1]$.

В одномерном случае

$$\left\| \int_a^x F_k'(t)\, dt - \int_a^x f_k(t)\, dt \right\|_{L(a,b)} \leqslant (b-a) \int_a^b |F_k'(t) - f(t)|\, dt \to 0 \;\; (k \to \infty),$$

и $\lambda(\mathbf{y})$ превращается в некоторую константу A, что приводит к (6′).

В одну сторону теорема доказана.

Пусть теперь локально суммируемые на G функции f и F таковы, что после возможного видоизменения F на множестве n-мерной меры нуль на любом указанном прямоугольнике Δ

имеет место представление (6) почти для всех $\mathbf{y} \in \Delta'$ и любого $x_1 \in [a_1, b_1]$, в одномерном случае — (6′).

Определим последовательность непрерывных на Δ' функций $\lambda_k(y)$ (в одномерном случае $\lambda_k = A$) и другую последовательность непрерывных на Δ функций $f_k(x_1, \mathbf{y})$ так, чтобы

$$\|\lambda - \lambda_k\|_{L(\Delta')} \to 0, \quad \|f - f_k\|_{L(\Delta)} \to 0 \qquad (k \to \infty). \tag{10}$$

Положим

$$F_k(x_1, \mathbf{y}) = \lambda_k(\mathbf{y}) + \int_a^{x_1} f_k(t, \mathbf{y})\, dt \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Очевидно, что F_k непрерывны на Δ и имеют там непрерывную производную $\frac{\partial F_k}{\partial x_1} = f_k$ и выполняются свойства (7) (см. (9), (10)). Но тогда в силу предыдущей теоремы ввиду произвольности $\Delta \subset G$ функция f есть обобщенная производная от F по x_1 на G. Этим теорема доказана и в другую сторону.

Функция $\Phi(x)$ от одной переменной x называется *абсолютно непрерывной* на отрезке $[a, b]$, если ее можно представить в виде

$$\Phi(x) = A + \int_c^x f(t)\, dx, \quad x \in [a, b], \tag{11}$$

где c — точка отрезка $[a, b]$, A — некоторая константа и $f \in L(a, b)$.

Ясно, что Φ непрерывна на отрезке $[a, b]$, потому что для $x, x + h \in [a, b]$

$$\Phi(x + h) - \Phi(x) = \int_x^{x+h} f(t)\, dt \to 0 \qquad (h \to 0)$$

(см. § 19.3, свойство 11). Константа A имеет простой смысл

$$A = \Phi(c)$$

$\left(\text{ведь } \int_c^c f\, dt = 0\right)$. Если Φ уже представлена в виде

$$\Phi(x) = \Phi(c) + \int_c^x f(t)\, dt \tag{12}$$

для данной точки $c \in [a, b]$, то соответствующее ее представление для другой точки $c_1 \in [a, b]$ будет иметь вид

$$\Phi(x) = \Phi(c_1) + \int_{c_1}^x f(t)\, dx,$$

потому что в силу (12)

$$\Phi(c_1)+\int_{c_1}^{x} f\,dt=\Phi(c)+\int_{c}^{c_1} f\,dt+\int_{c_1}^{x} f\,dt=\Phi(c)+\int_{c}^{x} f\,dt$$

тождественно для всех $x\in[a, b]$.

Назовем еще определенную на одномерном открытом множестве G функцию *локально абсолютно непрерывной*, если она абсолютно непрерывна на каждом принадлежащем G отрезке.

Если функция $\Phi(x)$ локально абсолютно непрерывна на интервале (a, b), то она, очевидно, представима на нем в виде

$$\Phi(x)=A+\int_{c}^{x} f(t)\,dt, \qquad c\in(a, b), \tag{13}$$

где f локально интегрируема на (a, b), но не обязательно интегрируема на (a, b) (см. теорему 3, (6')).

Теорему 3 в одномерном случае можно сформулировать так:

Теорема 4. *Для того чтобы функция имела обобщенную производную на открытом одномерном множестве G (в частности, на интервале), необходимо и достаточно, чтобы после возможного ее видоизменения на множестве меры нуль она оказалась локально абсолютно непрерывной на G.*

В представлении (13) локально абсолютно непрерывной функции $\Phi(x)$ на интервале единственна не только константа A, но и функция $f\in L(a, b)$, во всяком случае с точностью до эквивалентности. Ведь, как это следует из теоремы 3, функция f есть обобщенная производная от $F(F'(x)=f(x))$, и потому с точностью до эквивалентности — единственная (см. следствие из теоремы 1).

Мы уже отмечали, что абсолютно непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция Φ непрерывна на нем. Но на самом деле абсолютно непрерывная функция на отрезке $[a, b]$ (вообще не на интервале!) обладает более сильным свойством. Именно, для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что каково бы ни было принадлежащее к $[a, b]$ множество

$$\Omega=\bigcup_{j=1}^{N}(x_i, x_i'),$$

состоящее из любого числа не налегающих друг на друга интервалов (x_i, x_i'), сумма длин которых

$$\sum_{1}^{N}(x_j'-x_j)<\delta,$$

справедливо неравенство

$$\sum_{j=1}^{N}\left|\Phi(x_j')-\Phi(x_j)\right|<\varepsilon.$$

Если учесть, что из (11) следует

$$\sum_{j=1}^{N} |\Phi(x_j') - \Phi(x_j)| \leqslant \sum_{j=1}^{N} \int_{x_j}^{x_j'} |f(t)|\,dt = \int_{\Omega} |f(t)|\,dt,$$

то мы видим, что это свойство непосредственно вытекает из свойства 11, § 19.3.

Важно отметить, что это свойство является характерным для абсолютно непрерывной функции, потому что можно доказать, что и обратно — из того, что какая-нибудь определенная на $[a, b]$ функция Φ обладает этим свойством, следует, что Φ представимо на $[a, b]$ по формуле (11), где A — некоторая константа, а f — некоторая определенная на $[a, b]$ почти всюду функция, принадлежащая к $L(a, b)$.

Таким образом, мы имеем два эквивалентные определения абсолютно непрерывной функции. Мы не будем здесь доказывать их эквивалентность, отсылая читателя к полным курсам теории функций действительного переменного. В приложениях обычно пользуются на самом деле первым определением.

В полных курсах теории функций действительного переменного доказывается также, что определяемая по формуле (11) абсолютно непрерывная функция Φ имеет почти для всех $x \in [a, b]$ обычную производную, равную $f(x)$:

$$\Phi'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = f(x). \tag{14}$$

Это показывает, что *обобщенная производная от абсолютно непрерывной функции эквивалентна обычной.*

Мы здесь отказываемся от доказательства также и этого утверждения. Отметим только, что равенство (14) тривиально, если x есть точка непрерывности функции $f \in L(a, b)$. Ведь для такой точки и любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать $\delta > 0$ так, что $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$, если $|t - x| < \delta$; поэтому

$$\left|\frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} - f(x)\right| = \\ = \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt - f(x)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|\,dt\right| < \varepsilon$$

для всех h с $|h| < \delta$.

Теорема 5. *Справедлива формула интегрирования по частям*

$$\int_a^b F(x)\,\Phi'(x)\,dx = F(b)\,\Phi(b) - F(a)\,\Phi(a) - \int_a^b F'(x)\,\Phi(x)\,dx, \tag{15}$$

где F и Φ — абсолютно непрерывные на отрезке $[a, b]$ функции.

Доказательство. Положим $F'=f$, $\Phi'=\varphi$ и построим последовательности непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций f_N, φ_N такие, что (см. § 18.2, свойство 4)

$$\|f-f_N\|_{L(a,b)},\quad \|\varphi-\varphi_N\|_{L(a,b)}\to 0,\quad N\to\infty.$$

В силу условия теоремы

$$F(x)=A+\int_a^x f(t)\,dt,\quad \Phi(x)=B+\int_a^x \varphi(t)\,dt,\quad x\in[a,b],$$

где A, B — константы. Положим

$$F_N(x)=A+\int_a^x f_N(t)\,dt,\quad \Phi_N(x)=B+\int_a^x \varphi_N(t)\,dt,\quad x\in[a,b].$$

Тогда

$$|F(x)-F_N(x)|\leqslant\int_a^b|f-f_N|\,dt\to 0,\quad N\to\infty,$$

$$|\Phi(x)-\Phi_N(x)|\leqslant\int_a^b|\varphi-\varphi_N|\,dt\to 0,\quad N\to\infty,\quad x\in[a,b],$$

и, следовательно, F_N и Φ_N стремятся при неограниченном возрастании N соответственно к F и Φ равномерно на $[a, b]$. Так как f_N, φ_N являются непрерывными производными соответственно от F_N, φ_N, то имеют место классические формулы интегрирования по частям

$$\int_a^b F_N\varphi_N dx=F_N(b)\,\Phi_N(b)-F_N(a)\,\Phi_N(a)-\int_a^b f_N\,\Phi_N dx,$$

из которых переходом к пределу при $N\to\infty$ можно получить (15). Например,

$$\left|\int_a^b F\varphi dx-\int_a^b F_N\varphi_N dx\right|\leqslant\int_a^b|F-F_N||\varphi|\,dx+\int_a^b|F_N||\varphi-\varphi_N|\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\int_a^b|\varphi|\,dx\max_x|F(x)-F_N(x)|+K\int_a^b|\varphi-\varphi_N|\,dx\to 0,\quad N\to\infty$$

Здесь K — константа, превышающая $|F_N|$ для всех N и x, существующая, потому что последовательность непрерывных функций F_N сходится равномерно.

Теорема 6. *Пусть f и F — локально интегрируемые функции на области G. Для того чтобы f была обобщенной производной от F по x_1 на G, необходимо и достаточно, чтобы функция F*

после возможного ее видоизменения на множестве n-мерной меры нуль была локально абсолютно непрерывной по x_1 на G почти для всех точек $\mathbf{y}=(x_2, \ldots, x_n)$, принадлежащих к проекции G' области G на плоскость $x_1=0$, и чтобы для указанных y производная $\frac{\partial F}{\partial x_1}$ была равна $f(x_1, \mathbf{y})$ почти всюду в одномерном смысле.

Доказательство. Условимся в обозначениях: если множество $e \subset G$, то e' есть его проекция на плоскость $x_1=0$ и e_y — пересечение e с прямой, параллельной оси x_1, проходящей через точку $(0, \mathbf{y})$. Далее, фигурой σ мы называем множество, состоящее из конечного числа прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат.

Начнем с доказательства достаточности условия теоремы. Пусть функция F видоизменена, как указано в формулировке, и $\varphi \in D$. Носитель φ есть ограниченное замкнутое множество, принадлежащее к G, и его можно покрыть фигурой $\sigma \subset G$. Поэтому (пояснения ниже)

$$\int F \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} d\mathbf{x} = \int_{\sigma'} d\mathbf{y} \int_{\sigma_y} F \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 = -\int_{\sigma'} d\mathbf{y} \int_{\sigma_y} \frac{\partial F}{\partial x_1} \varphi \, dx_1 =$$

$$= -\int_{\sigma'} d\mathbf{y} \int_{\sigma_y} f(x_1, \mathbf{y}) \varphi \, dx_1 = -\int f\varphi \, d\mathbf{x}. \quad (16)$$

В первом равенстве цепи применена теорема Фубини к функции $F \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \in L(\sigma)$ (равной нулю вне σ). Внутренний интеграл по x_1 (только для тех $\mathbf{y}$, для которых $F(x_1, \mathbf{y})$ абсолютно непрерывна) представляется как сумма соответствующих интегралов по отрезкам, из которых состоит σ_y. К этим последним интегралам применяется интегрирование по частям, законное в силу предыдущей теоремы.

Третье равенство следует из условия теоремы, по которому почти для всех $\mathbf{y}$ $\frac{\partial F}{\partial x_1} = f$ почти для всех x_1 в одномерном смысле. Наконец, четвертое равенство, выражающее переход от последовательного к кратному интегрированию, верно по теореме Фубини, так как $f \in L(\sigma)$.

Так как (16) верно для любых $\varphi \in D$, то достаточность условия теоремы доказана.

Переходим к доказательству необходимости условия теоремы. Пусть f есть обобщенная производная от F по x_1 на G.

Пусть

$$G = \sum_1^\infty \Delta_k, \quad |G| = \sum_1^\infty |\Delta_k|, \quad \Delta_k = \{a_i^{(k)} \leqslant x_i \leqslant b_i^{(k)}, \ i = 1, \ldots, n\}$$

— счетная сумма кубов, пересекающихся попарно разве что по своим границам.

По теореме 3 функцию F можно видоизменить на множестве n-мерной меры нуль и в видоизмененном виде записать при помощи равенств

$$\begin{gathered} F(\mathbf{x}) = F(x_1, \mathbf{y}) = \lambda_k(\mathbf{y}) + \int_{a_1^{(k)}}^{x_1} f(t, \mathbf{y})\, dt \qquad (k = 1, 2, \ldots), \\ \mathbf{x} = (x_1, \mathbf{y}) \in \Delta_k, \quad y \in \Delta_k' - e_k, \quad |e_k|_* = 0, \end{gathered} \tag{17}$$

где $\lambda_k(\mathbf{y}) \in L(\Delta_k')$ — единственная с точностью до $(n-1)$-мерной меры нуль конечная функция. Так как ($(n-1)$-мерная) мера множества $\sum_1^\infty e_k$ равна нулю, то равенства (17) определяют (видоизмененную) функцию F почти всюду на G. Непосредственно видно, что F для указанных $\mathbf{y}$ по x_1 абсолютно непрерывна, по в пределах каждого куба Δ_k. Покажем, что множества e_k могут быть увеличены с сохранением свойства $|e_k|_* = 0$ так, что определяемая равенствами (17) функция F по x_1 будет локально абсолютно непрерывна на G для всех $\mathbf{y} \in G' - e$, $e = \sum_1^\infty e_k$ ($|e|_* = 0$).

Рассмотрим два куба Δ_k и Δ_l, имеющие в направлении x_1 общую границу, представляющую собой некоторый прямоугольник

$$\Delta' = \{\alpha_j \leqslant x_j \leqslant \beta_j; \quad j = 2, \ldots, n\}.$$

Будем считать, что Δ_l находится правее Δ_k. Нас будут интересовать те части $\Delta_* \subset \Delta_k$, $\Delta_{**} \subset \Delta_l$, которые имеют указанную общую проекцию Δ'. Итак, пусть

$$\begin{gathered} \Delta_* = [\alpha, \beta] \times \Delta', \quad \Delta_{**} = [\beta, \gamma] \times \Delta', \\ \alpha = a_1^{(k)}, \quad \beta = b_1^{(k)} = a_1^{(l)}, \quad \gamma = b_1^{(l)}, \quad \alpha < \beta < \gamma. \end{gathered}$$

Имеем

$$\begin{gathered} F(x_1, \mathbf{y}) = \lambda_k(\mathbf{y}) + \int_\alpha^{x_1} f(t, \mathbf{y})\, dt \text{ на } \Delta_*, \quad \mathbf{y} \in \Delta' - e_k \\ F(x_1, \mathbf{y}) = \lambda_l(\mathbf{y}) + \int_\beta^{x_1} f(t, \mathbf{y})\, dt \text{ на } \Delta_{**}, \quad \mathbf{y} \in \Delta' - e_l. \end{gathered} \tag{18}$$

Но можно также, применяя теорему 3 к прямоугольнику $\Delta = \Delta_* + \Delta_{**}$, установить существование функции F_0, равной F

почти всюду на Δ, и функции $\lambda(\mathbf{y}) \in L(\Delta')$ такой, что

$$F_0(x_1, \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{y}) + \int_{\alpha}^{x_1} f(t, \mathbf{y})\, dt \text{ на } \Delta, \quad \mathbf{y} \in \Delta' - e_{kl}, \tag{19}$$

$$|e_{kl}|_* = 0.$$

Так как $F = F_0$ почти всюду на Δ_*, то $\lambda_k(\mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{y})$ почти всюду на Δ' в смысле $(n-1)$-мерной меры, и так как $F_0 = F$ почти всюду на Δ_{**}, то почти всюду на Δ' в смысле $(n-1)$-мерной меры выполняется равенство

$$\lambda_l(\mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{y}) + \int_{\alpha}^{\beta} f(t, \mathbf{y})\, dt.$$

Это показывает, что e_{kl} можно увеличить, сохраняя меру $[e_{kl}]_*$, так что для всех $\mathbf{y} \in \Delta' - e_{kl}$ имеют место тождества $F = F_0$ на Δ_*, $F = F_0$ на Δ_{**}, и таким образом, функция F для указанных $\mathbf{y}$ вместе с F_0 абсолютно непрерывна на Δ по x_1.

Пусть теперь

$$e = \sum e_{kl}, \quad |e|_* = 0,$$

где сумма распространена на всевозможные пары (k, l), для которых Δ_l граничит с Δ_k справа от Δ_k. Нетрудно видеть, что для всех $y \in G' - e$ наша функция F по x_1 на G локально абсолютно непрерывна.

Отметим, что так как теоремы 2, 3, 6 дают необходимые и достаточные условия для того, чтобы функция f была обобщенной производной по x_1 от F на G, то эти условия могут быть взяты за исходное определение обобщенной функции.

Мы определили обобщенную производную $\frac{\partial F}{\partial x_1}$. По аналогии определяются обобщенные производные $\frac{\partial F}{\partial x_j}$ $(j = 2, \ldots, n)$.

Обобщенные производные высшего порядка определяются по индукции, например, вторая обобщенная производная

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)$$

есть обобщенная производная по x_1 от обобщенной производной $\frac{\partial F}{\partial x_2}$.

Заметим, что если данная функция F имеет на G обобщенные производные $\frac{\partial F}{\partial x_1}$, $\frac{\partial F}{\partial x_2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}$, то автоматически существует обобщенная производная $\frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1}$, равная почти всюду $\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}$.

В самом деле, для любой функции $\varphi \in D$ имеет место

$$\int \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \varphi\, dx = -\int \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx = \int F \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_1} dx =$$

$$= \int F \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} = -\int \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx,$$

т. е. показано, локально интегрируемые функции $\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}$ и $\frac{\partial F}{\partial x_1}$ удовлетворяют равенству

$$\int \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \varphi\, dx = -\int \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx.$$

Но это значит, что первая из них есть обобщенная производная по x_2 от второй, т. е. $\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1}$ почти всюду на G.

Эти факты легко обобщаются на смешанные производные более высокого порядка.

§ 19.6. Пространство обобщенных функций D'

Мы снова будем рассматривать пространство D бесконечно дифференцируемых финитных в некоторой области $\Omega \subset R_n$ функций φ (действительных или комплексных) и поставим своей целью определить над D пространство D' обобщенных функций, подобно тому как в § 16.7 было определено пространство S' над S.

Говорят, что последовательность функций $\varphi_k \in D$ сходится к $\varphi \in D$ в смысле (D), и пишут

$$\varphi_k \to \varphi \quad (D),$$

если носители φ_k принадлежат к одному и тому же компакту $F \subset \Omega$ и если равномерно (на R_n)

$$\lim_{k \to \infty} \varphi_k^{(s)}(\mathbf{x}) = \varphi^{(s)}(\mathbf{x}), \qquad \varphi^{(0)} = \varphi,$$

какова бы ни была частная производная $\varphi^{(s)}$ порядка $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n)$.

Множество D называют *пространством* D (в связи с тем, что в нем определена сходимость — топология).

По определению *обобщенной функцией* $f \in D'$ называется линейный и непрерывный функционал (f, φ), определенный над D, т. е. такой функционал, для которого выполняются следующие два свойства:

1) $f(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha f(\varphi) + \beta f(\psi)$ для любых чисел (действительных, комплексных) α, β и функций φ, $\psi \in D$, $(f(\varphi) = (f, \varphi))$,

2) $f(\varphi_k) \to f(\varphi)$, $\varphi_k \to \varphi \quad (D)$.