В самом деле, для любой функции $\varphi \in D$ имеет место

$$\int \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \varphi\, dx = -\int \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\, dx = \int F \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_1}\, dx =$$

$$= \int F \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} = -\int \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\, dx,$$

т. е. показано, локально интегрируемые функции $\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}$ и $\frac{\partial F}{\partial x_1}$ удовлетворяют равенству

$$\int \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \varphi\, dx = -\int \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\, dx.$$

Но это значит, что первая из них есть обобщенная производная по x_2 от второй, т. е. $\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1}$ почти всюду на G.

Эти факты легко обобщаются на смешанные производные более высокого порядка.

§ 19.6. Пространство обобщенных функций D'

Мы снова будем рассматривать пространство D бесконечно дифференцируемых финитных в некоторой области $\Omega \subset R_n$ функций φ (действительных или комплексных) и поставим своей целью определить над D пространство D' обобщенных функций, подобно тому как в § 16.7 было определено пространство S' над S.

Говорят, что последовательность функций $\varphi_k \in D$ сходится к $\varphi \in D$ в смысле (D), и пишут

$$\varphi_k \to \varphi \quad (D),$$

если носители φ_k принадлежат к одному и тому же компакту $F \subset \Omega$ и если равномерно (на R_n)

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k^{(s)}(\mathbf{x}) = \varphi^{(s)}(\mathbf{x}), \qquad \varphi^{(0)} = \varphi,$$

какова бы ни была частная производная $\varphi^{(s)}$ порядка $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n)$.

Множество D называют *пространством* D (в связи с тем, что в нем определена сходимость — топология).

По определению *обобщенной функцией* $f \in D'$ называется линейный и непрерывный функционал (f, φ), определенный над D, т. е. такой функционал, для которого выполняются следующие два свойства:

1) $f(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha f(\varphi) + \beta f(\psi)$ для любых чисел (действительных, комплексных) α, β и функций φ, $\psi \in D$, $(f(\varphi) = (f, \varphi))$,

2) $f(\varphi_k) \to f(\varphi)$, $\varphi_k \to \varphi \quad (D)$.

Очевидно, что $D \subset S$, где S — определенное в § 16.6 пространство бесконечно дифференцируемых на R_n функций, стремящихся к нулю на бесконечности вместе со своими частными производными быстрее любой степени $|x|$. Кроме того, сходимость $\varphi_k \to \varphi(D)$ является в то же время сходимостью $\varphi_k \to \varphi(S)$. Поэтому линейный непрерывный функционал f на S, если его рассматривать только для $\varphi \in D$, автоматически есть линейный непрерывный функционал на D. Говорят, что первый функционал *индуцирует* второй на D. В этом смысле можно считать, что $S' \subset D'$.

Например, δ-функция, определенная как функционал $(\delta, \varphi) = \varphi(0)$, $\varphi \in S$, индуцирует функционал $(\delta, \varphi) = \varphi(0)$, $\varphi \in D$, называемый тоже δ-функцией (определенной на D).

Производная от $f \in D'$ порядка $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ определяется как функционал $(f^{(k)}, \varphi) = (-1)^{|k|}(f, \varphi^{(k)})$, $\varphi \in D$. Но это же равенство, верное для всех $\varphi \in S$, определяет производную $f^{(k)}$ от $f \in S'$. Поэтому, если $f \in S'$, то производную $f^{(k)}$ в смысле (D) можно определить как функционал, индуцируемый на D функционалом $f^{(k)}$, определенным в смысле (S).

Если $f(\mathbf{x})$ есть функция, локально интегрируемая на Ω, то она *представляет обобщенную функцию* $f \in D'$ при помощи интеграла

$$(f, \varphi) = \int f(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \quad \varphi \in D.$$

Непрерывность этого функционала следует из того, что если $\varphi_k \to \varphi(D)$, то $\varphi_k \to \varphi$ равномерно на R_n, и существует компакт $F \subset \Omega$, содержащий в себе носители φ и всех функций φ_k, и потому

$$|(f, \varphi) - (f, \varphi_k)| \leqslant \int_F |f(\mathbf{x})|\, |\varphi(\mathbf{x}) - \varphi_k(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} \leqslant$$

$$\leqslant \max_x |\varphi(\mathbf{x}) - \varphi_k(\mathbf{x})| \int_F |f|\, d\mathbf{x} \to 0, \quad k \to \infty.$$

Справедлива следующая важная теорема:

Теорема 1. *Две локально интегрируемые на Ω функции f_1 и f_2 представляют один и тот же функционал тогда и только тогда, если они равны почти всюду на Ω.*

Доказательство. Положим $f(x) = f_1(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{x})$. Очевидно, что теорема сводится к установлению того факта, что для выполнения равенства

$$\int f(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0 \quad \text{для всех } \varphi \in D \tag{1}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$f(\mathbf{x}) = 0 \text{ почти для всех } \mathbf{x} \in \Omega. \tag{2}$$

Из (2) тривиально следует (1). Доказать обратное нам поможет лемма.

Лемма. *Если функция $\psi(x)$ локально измерима*) и ограничена на открытом множестве G, то существует последовательность бесконечно дифференцируемых финитных в G функций $\varphi_k \in D$, удовлетворяющая условиям*

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) \quad \textit{почти всюду на } G, \tag{3}$$

$$|\varphi_k(\mathbf{x})| \leqslant \sup_{\mathbf{x}\in G} |\psi(\mathbf{x})|. \tag{4}$$

В самом деле, обозначим через G_N пересечение G с шаром $|\mathbf{x}| \leqslant N$ и пусть η_N убывает к нулю. Так как $\psi \in L(G_N)$, то можно указать бесконечно дифференцируемую финитную в G_N, следовательно, в G, функцию ψ_N такую, что (§ 18.2, свойство 4)

$$\|\psi - \psi_N\|_{L(G_N)} \leqslant \eta_N, \tag{5}$$

$$|\psi_N(x)| \leqslant \sup_{x\in G} |\psi(\mathbf{x})|. \tag{6}$$

Из (5) и (6) (см. § 19.3, свойство 21)**) следует, что из последовательности $\{\psi_N\}$ можно выделить подпоследовательность, подчиняющуюся условиям леммы.

Пусть теперь верно (1). Положим

$$\psi(\mathbf{x}) = \operatorname{sign} f(\mathbf{x}) \tag{7}$$

и пусть $G \subset \overline{G} \subset \Omega$ есть произвольное открытое ограниченное множество. Подберем для ψ последовательность бесконечно дифференцируемых финитных в G функций φ_k так, чтобы выполнялись условия (3), (4) доказанной леммы. Так как $\varphi_k \in D$, то в силу (1) $\int f(\mathbf{x})\,\varphi_k(x)\,dx = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$, и потому (пояснения ниже)

$$0 = \lim_{k\to\infty} \int_G f(\mathbf{x})\,\varphi_k(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_G f(\mathbf{x})\,\psi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_G |f(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x}, \tag{8}$$

т. е. $f(\mathbf{x}) = 0$ почти всюду на G и в силу произвольности G также почти всюду на Ω, и мы доказали (1).

---

*) Т. е. измерима на VG, где V — произвольный шар.

**) Из свойства 21, § 19.3 непосредственно следует, что так как $\|\psi - \psi_N\|_{L(G_1)} < \eta_N$, то найдется подпоследовательность (первая) $N_1^1, N_2^1, \ldots$, такая, что $\psi_{N_k^1} \to \psi$ почти всюду на Ω_1. Далее, $\left\|\psi - \psi_{N_k^1}\right\|_{L(G_2)} < \eta_{N_k^1}$, и можно из первой подпоследовательности выделить вторую $N_1^2, N_2^2, \ldots$, для которой $\psi_{N_k^2} \to \psi$ почти всюду на G_2. Продолжая этот процесс, получим таблицу подпоследовательности $N_1^k, N_2^k, \ldots$ $(k = 1, 2, \ldots)$, каждая из которых есть подпоследовательность предыдущей. Легко видеть, что для диагональной подпоследовательности $N_1^1, N_2^2, \ldots$ будет $\psi_{N_k^k} \to \psi$ почти всюду на G.

Во втором члене цепи можно интегрировать только по G, потому что носитель φ_k принадлежит к G. Переход к третьему члену осуществлен на основании теоремы Лебега, применимой потому, что в силу (4) и (7) и локальной интегрируемости f

$$|f(\mathbf{x})\varphi_k(\mathbf{x})| \leqslant |f(\mathbf{x})| \leqslant L(G).$$

В заключение отметим теорему.

Теорема 2. *Пусть f и F — локально интегрируемые на Ω функции (таким образом, $f, F \in D'$).* Если

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\partial F}{\partial x_1} \quad \text{на } \Omega \text{ по Соболеву}, \tag{9}$$

то

$$f = \frac{\partial F}{\partial x_1} \quad \text{в смысле } (D), \tag{10}$$

и наоборот.

Ведь для локально интегрируемых на Ω функций F и f оба равенства (9), (10) эквивалентны следующему:

$$\int f(\mathbf{x})\,\varphi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = -\int F(\mathbf{x})\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\,dx \quad \text{для всех } \varphi \in D.$$

§ 19.7. Неполнота пространства L_p'

Рациональные точки $(0, 1)$ перенумеруем $(r_1, r_2, \ldots)$ и покроем k-ю из них интервалом σ_k с центром в ней, принадлежащим к $(0, 1)$ и имеющим длину меньшую, чем $\varepsilon 2^{-k}$ $(0 < \varepsilon < 1, k = 1, 2, 3, \ldots)$. Пусть $G = \sum_1^\infty \sigma_k$ — множество (открытое), принадлежащее к $(0, 1)$, и

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in G, \\ 0, & x \in [0, 1] - G = F, \end{cases}$$

т. е. $f = f_G$ есть характеристическая функция множества G. Пусть, далее, f_1 — функция, эквивалентная f (равная f почти всюду).

Лебегова мера множества G удовлетворяет неравенству

$$\mu G \leqslant \sum_1^\infty |\sigma_k| < \varepsilon < 1,$$

Поэтому дополнительное к нему множество (замкнутое) F имеет положительную лебегову меру. Обозначим через e то множество (лебеговой меры нуль), на котором f и f_1 различаются, и положим $G' = G \backslash e$, $F' = F \backslash e$. Если $x \in F'$, то $f_1(x) = 0$. Но в любой окрестности σ точки x имеется некоторая рациональная точка r_k, которая покрыта интервалом σ_k. При этом пересечение $\sigma\sigma_k(|\sigma\sigma_k| >$