Во втором члене цепи можно интегрировать только по G, потому что носитель φ_k принадлежит к G. Переход к третьему члену осуществлен на основании теоремы Лебега, применимой потому, что в силу (4) и (7) и локальной интегрируемости f

$$|f(\mathbf{x})\varphi_k(\mathbf{x})| \leqslant |f(\mathbf{x})| \leqslant L(G).$$

В заключение отметим теорему.

Теорема 2. *Пусть f и F — локально интегрируемые на Ω функции (таким образом, $f, F \in D'$).* Если

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\partial F}{\partial x_1} \quad \text{на } \Omega \text{ по Соболеву}, \tag{9}$$

то

$$f = \frac{\partial F}{\partial x_1} \quad \text{в смысле } (D), \tag{10}$$

и наоборот.

Ведь для локально интегрируемых на Ω функций F и f оба равенства (9), (10) эквивалентны следующему:

$$\int f(\mathbf{x})\,\varphi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = -\int F(\mathbf{x})\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\,dx \text{ для всех } \varphi \in D.$$

§ 19.7. Неполнота пространства L_p'

Рациональные точки $(0, 1)$ перенумеруем $(r_1, r_2, \ldots)$ и покроем k-ю из них интервалом σ_k с центром в ней, принадлежащим к $(0, 1)$ и имеющим длину меньшую, чем $\varepsilon 2^{-k}$ $(0 < \varepsilon < 1, k = 1, 2, 3, \ldots)$. Пусть $G = \sum_1^\infty \sigma_k$ — множество (открытое), принадлежащее к $(0, 1)$, и

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in G, \\ 0, & x \in [0, 1] - G = F, \end{cases}$$

т. е. $f = f_G$ есть характеристическая функция множества G. Пусть, далее, f_1 — функция, эквивалентная f (равная f почти всюду).

Лебегова мера множества G удовлетворяет неравенству

$$\mu G \leqslant \sum_1^\infty |\sigma_k| < \varepsilon < 1,$$

Поэтому дополнительное к нему множество (замкнутое) F имеет положительную лебегову меру. Обозначим через e то множество (лебеговой меры нуль), на котором f и f_1 различаются, и положим $G' = G \backslash e$, $F' = F \backslash e$. Если $x \in F'$, то $f_1(x) = 0$. Но в любой окрестности σ точки x имеется некоторая рациональная точка r_k, которая покрыта интервалом σ_k. При этом пересечение $\sigma\sigma_k$ $(|\sigma\sigma_k| >$

>0!) заведомо содержит точки G', в которых $f_1=1$. Это показывает, что f_1 разрывна на множестве F' положительной меры, и потому по теореме Лебега (см. § 12.10) f_1 не интегрируема по Риману на $[0, 1]$. Она также не принадлежит к $L'(0, 1)$. Ведь не только ограниченные (интегрируемые по Риману), но и неограниченные функции из $L'(0, 1)$ непрерывны почти всюду на $[0, 1]$. Это легко вытекает из того, что если функция $f_1 \in L'(0, 1)$ не ограничена, то для нее существует на $[0, 1]$ только конечное число точек $x_0, \ldots, x_N$ таких, что на любом отрезке $[a, b]$, принадлежащем к $[0, 1]$ и не содержащем в себе ни одной из этих точек, f_1 интегрируема в римановом (собственном) смысле.

Таким образом, *функция f может служить примером ограниченной на $[0, 1]$ функции, не интегрируемой по Риману и такой, что любая, ей эквивалентная функция $f_1 \notin L'$ (0, 1).*

Отметим еще, что так как $f = f_G$ есть характеристическая функция множества G, то *последнее может служить примером ограниченного открытого множества, не измеримого по Жордану, так же как, очевидно, F может служить примером ограниченного замкнутого множества, не измеримого по Жордану.*

Но, конечно, множества G и F измеримы по Лебегу, потому что любое открытое и любое замкнутое ограниченное множество обладает этим свойством. Поэтому функция f интегрируема по Лебегу на $(0, 1)$ и ее интеграл равен

$$\int_G f\,dx = \int_G f_1 dx = \mu G.$$

Пусть $f_k(x)$ есть характеристическая функция множества $\omega_k = \sigma_1 + \ldots + \sigma_k$. Очевидно, что

$$\int_0^1 |f(x) - f_k(x)|\,dx = \int_{G-\omega_k} |f(x)|\,dx = \mu(G-\omega_k) \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Но тогда удовлетворяется условие Коши, т. е. для всякого $\eta > 0$ можно указать N такое, что

$$\int_0^1 |f_k(x) - f_l(x)|\,dx < \eta, \quad k, l > N. \tag{1}$$

Всюду выше интегралы понимались в лебеговом смысле. Однако интегралы (1) можно понимать также и в римановом смысле, потому что функции $f_k(x)$ интегрируемы по Риману на $[0, 1]$.

Итак, имеется следующая ситуация: последовательность функций $f_k \in L'(0, 1)$ удовлетворяет условию Коши в смысле $L(0, 1)$, но не существует функции $\varphi \in L'(0, 1)$, к которой f_k стремится в смысле $L(0, 1)$.

Ведь если бы такая функция φ существовала, то она принадлежала бы также к $L(0, 1)$ (см. § 19.3, свойство 20), но тогда в силу единственности с точностью до эквивалентности функции f, для которой лебегов интеграл

$$\int_0^1 |f - f_k| \, dx \to 0, \quad k \to \infty,$$

стремится к нулю, φ должна равняться одной из функций f_1, эквивалентных f, и мы пришли к противоречию, потому что $f_1 \notin$ $\notin L'(0, 1)$.

Этим доказано, что *пространство* $L'(0, 1)$ *не полно*. Применяя ту же функцию f, читатель, аналогично рассуждая, докажет, что и *пространство* $L'_p(0, 1)$ *не полно*.

§ 19.8. Обобщение меры Жордана

Мы будем рассматривать полуоткрытые (ограниченные) прямоугольники

$$\Delta = \{c_j \leqslant \xi_j < d_j;\ j = 1, \ldots, n\}$$

и фигуры (полуоткрытые)

$$\sigma = \sum_{j=1}^{N} \Delta^j$$

— конечные суммы попарно непересекающихся полуоткрытых прямоугольников.

Иногда будем говорить просто о фигурах σ, подразумевая, что они полуоткрыты. Если же появится необходимость говорить о замкнутой или открытой фигуре (прямоугольнике), то это будет всякий раз оговариваться.

Пусть $G = \{a_j \leqslant \xi_j < b_j;\ j = 1, \ldots, n\}$ — фиксированный прямоугольник и каждому $\Delta \subset G$, в том числе и G, приведено в соответствие неотрицательное число $\alpha(\Delta)$ такое, что $\alpha(\Delta)$ есть аддитивная функция от Δ, т. е. если $\Delta = \sum_{j=1}^{N} \Delta^j$, где Δ^j — попарно непересекающиеся прямоугольники, то

$$\alpha(\Delta) = \sum_{j=1}^{N} \alpha(\Delta^j). \tag{1}$$

Функцию $\alpha(\Delta)$ будем считать продолженной на произвольные $\Delta \subset R_n$, положив

$$\alpha(\Delta) = \alpha(G\Delta).$$

Мы считаем $\alpha(\Delta) = 0$ для любого прямоугольника Δ не пересекающегося с G. Продолженная функция, очевидно, неотрицательна и аддитивна.